DBF

STATISTIKKEN BAG DEN NYE BETONNORM

CHR. F. JUSTESEN

PUBLIKATION 2: 1977
DANSK BETONFORENING

DANSK BETONFORENING

DANMARKS INGENIØRAKADEMI
Bygningsafdelingen

STATISTIKKEN BAG DEN NYE BETONNORM

af

Chr. F. Justesen

København, april 1977

INDHOLD

STATISTIKKEN BAG DEN NYE BETONNORM

Dette skrift er udarbejdet efter et foredrag med samme titel. Foredraget blev holdt første gang i Dansk Betonforening den 2.februar 1977 som indledning til forårssæsonen 77 med hovedemnet "Kontrol og godkendelse af betonkonstruktioner".

Synopsis

Skriftet sigter mod at give brugerne af betonnormerne en intuitiv forståelse af den statistiske baggrund for udførelse af kvalitetskontrol af beton efter DS 411. Kontrollen vender sig primært mod trykstyrken. Men de statistiske principper kan benyttes ved kontrol af mange andre betonegenskaber.

De forskellige parametre, som indgår i den statistiske kontrol, vil blive forklaret. Det drejer sig om karakteristisk værdi, stikprøvestørrelse, proportioneringsstyrke, spredning på styrken, sandsynlighed for at få kasseret beton, som er tilstrækkelig god (påtalerisiko).

Der sluttes af med en oversigt over udenlandske godkendelseskriterier samt de kriterier, som findes i det seneste CEB-forslag til en fælleseuropæisk betonnorm.

Betons trykstyrke og variationsårsagerne

Betons trykstyrke bestemmes primært ud fra DS 423.23 (Betons cylindertrykstyrke). En betoncylinder, diameter 150 mm, længde 300 mm, trykkes til brud. Trykstyrken er brudkraften divideret med tværsnitsarealet.

Hvis vi bestemmer trykstyrken for en række cylindre, som stammer fra beton blandet efter samme recept, viser det sig, at der kommer mange forskellige talresultater. Trykstyrken varierer. Dette kan vi også udtrykke ved at sige, at "betons trykstyrke" er en usikker størrelse. Når vi skal kontrollere betonkvaliteten, der normalt sættes lig med betonens trykstyrke, må vi tage hensyn til denne variation.

Variationsårsagerne findes på alle trin af betonens liv:

1. Materialerne.
   Svingende kvalitet af cement, vand, sten, grus og tilsætningsstoffer.
2. Blandeproceduren.
   Afvejning af de nødvendige mængder. Tilførslen til blandeanlægget. Blandetid. Doseringstidspunkt for tilsætningsstofferne.
3. Transport fra blander til udstøbested. Transportmetode, transporttid. Opbevaring i stødpudelager.
4. Udstøbning og komprimering.
   Støbemetode, komprimeringsmetode.
5. Lagring.
   Temperatur, fugtighed, vindforhold, osv.
6. Prøvning.

Variationsårsagerne 1 og 2 gælder både for betonen i konstruktionen og for betonen i prøvecylindrene. Det er derimod ikke tilfældet for 3, 4, 5 og 6. Vi forstår, at cylindertrykstyrken er en vikarierende egenskab for den trykstyrke, som findes i selve konstruktionen. De to størrelser kan ligge langt fra hinanden; men der er taget hensyn hertil ved fastsættelse af betonnormernes partialkoefficienter.

En matematisk beskrivelse af "betons trykstyrke"

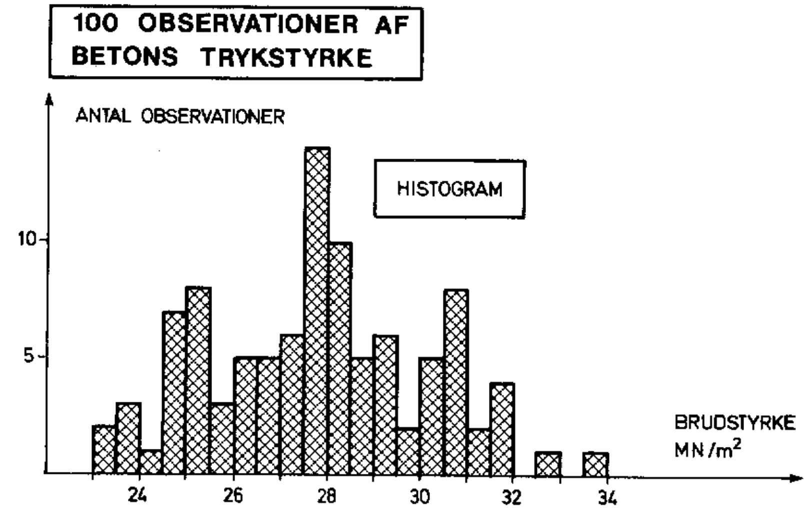
Vi må have en matematisk beskrivelse af variationerne for "Betons trykstyrke". Det er en forudsætning for, at der kan regnes på kvalitetskontrollen heraf. Lad os derfor betragte nogle konkrete prøveværdier.

100 observationer af betons trykstyrke. Enhed MN/m².					
29.0	24.5	23.6	29.2	28.3	30.9
24.5	23.4	25.2	30.1	27.1	25.0
$\boxed{33.6}$	30.8	30.7	23.6	25.3	27.9
27.2	27.9	24.7	30.7	29.1	29.1
25.9	28.1	27.5	28.2	26.1	27.9
26.9	25.1	30.1	28.2	28.9	26.8
29.8	28.1	25.1	27.2	31.5	26.6
25.3	23.6	27.7	28.1	25.5	29.5
27.5	29.0	30.1	29.0	25.8	27.6
27.5	27.8	25.1	26.9	26.6	30.5
30.8	25.7	30.5	25.1	28.3	24.8
26.2	28.4	28.6	28.5	31.2	26.0
27.5	26.1	24.7	28.2	32.6	30.7
24.9	28.5	$\boxed{23.2}$	31.5	28.2	25.5
31.9	26.0	27.5	31.1	27.5	24.0
27.1	27.1	27.7	24.5	27.8	28.7
30.1	30.2	31.8	27.2		

Tabel 1.

I tabel 1 findes 100 prøveresultater for beton blandet efter samme recept. Tallene står i en tilfældig rækkefølge. Største og mindste resultat er indrammet. Men det er vanskeligt at få noget overblik over variationerne. Det første vi kan gøre er at tegne et histogram over resultaterne. De 100 resultater deles ind i grupper svarende til intervaller af 0.5 MN/m²'s længde. Inden for hvert interval optegnes en stolpe, hvis længde svarer til antallet. Histogrammet er vist øverst på figur 1.

Det viser, at de fleste resultater ligger omkring midten. Histogrammer har den svaghed, at deres udseende er afhængigt af den valgte inddeling. Denne ulempe har vi ikke, hvis vi optegner den kummulerede hyppighed. Det er gjort nederst på figur 1. Den er uafhængig af inddelinger; til gengæld skal tallene sorteres. Vi bemærker, at den kummulerede hyppighed har et S-formet udseende. Dette udseende får en statistiker


100 OBSERVATIONER AF BETONS TRYKSTYRKE
ANTAL OBSERVATIONER
HISTOGRAM
10
5
BRUDSTYRKE
MN/m²
24
26
28
30
32
34

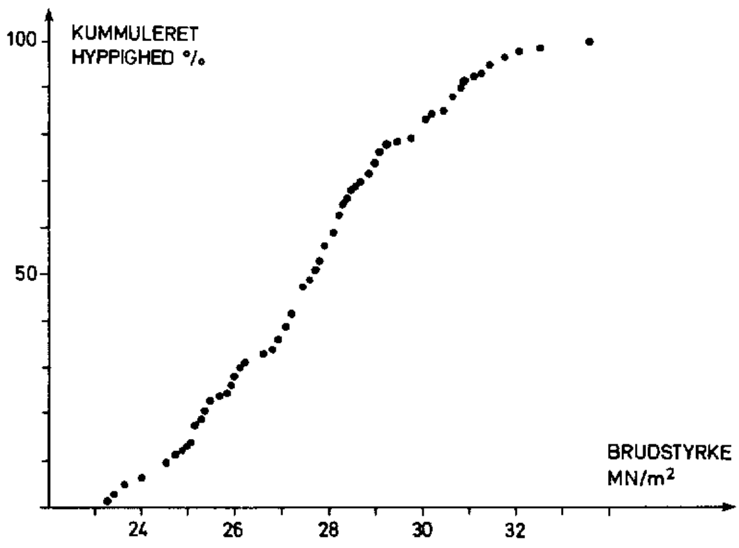

100
KUMMULERET
HYPPIGHED %
50
BRUDSTYRKE
MN/m²
24
26
28
30
32

Fig. 1.

til at prøve den såkaldte "normalfordeling" til beskrivelse af variationerne.

Hvis vi vil undersøge, om "normalfordelingen" kan bruges, kan vi optegne de kummulerede hyppigheder på det såkaldte "sandsynlighedspapir". Her er enhederne på den lodrette akse transformeret, således at hvis vore talresultater er "normalfordelte", vil punkterne omtrent ligge på en ret linie.

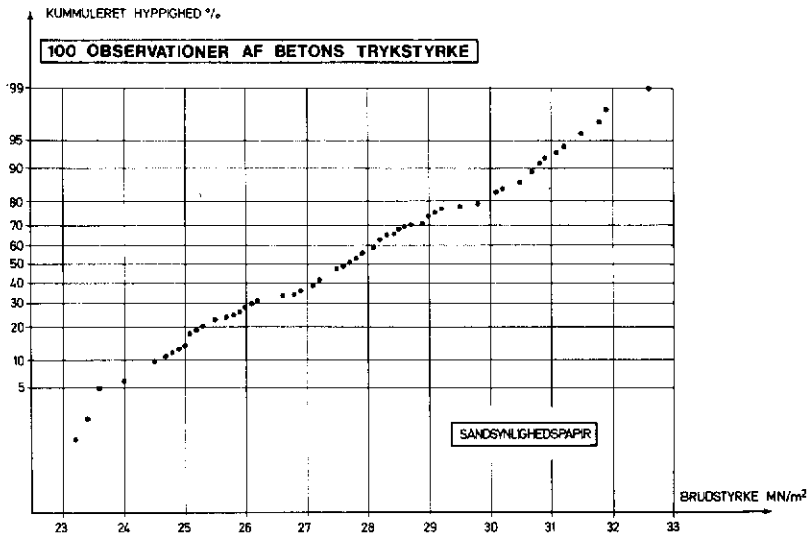
De 100 punkter er tegnet ind på sandsynlighedspapir. Resultatet er vist øverst på figur 2.

Vi ser, at punkterne passer nogenlunde til en ret linie. Men spørgsmålet er naturligvis, hvor grove afvigelser der kan tillades, hvis vi vil acceptere, at normalfordelingen beskriver vore data.

Den bedste vurdering heraf får vi, hvis vi indtegner de kummulerede hyppigheder for 100 tal, som virkelig er normalfordelte. Spørgsmålet er bare, hvor vi skal få disse "virkelig normalfordelte" tal fra.

Svaret er let, hvis man har en datamaskine. Den kan nemlig (efter en passende programmering) så at sige ryste en serie normalfordelte tal ud af ærmet. I princippet kan man forklare virkemåden som følger: Der opstilles en stor serie tal (f.eks. 1000) med den egenskab, at de indtegnet på et stykke sandsynlighedspapir ligger eksakt på en ret linie. Hvert tal skrives på en seddel. Alle sedler kommes i en kasse. Der røres grundigt rundt i kassen og derefter trækkes en seddel. Tallet skrives ned og sedlen lægges tilbage. Således fortsættes, til man har det ønskede antal værdier, og denne mængde af tal er normalfordelt.

Der er genereret 100 normalfordelte tal på en datamaskine. Den kummulerede hyppighed er indtegnet nederst på figur 2. Vi ser, at der ikke er nogen særlig forskel på afvigelserne fra en ret linie øverst og nederst på figur 2.


KUMMULERET HYPPIGHED %
100 OBSERVATIONER AF BETONS TRYKSTYRKE
99
95
90
80
70
60
50
40
30
20
10
5
SANDSYNLIGHEDSPAPIR
BRUDSTYRKE MN/m²
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33

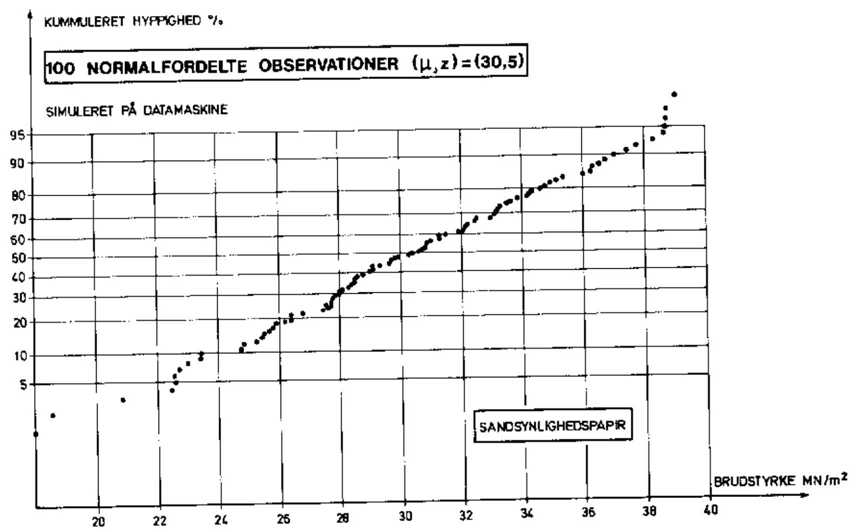

KUMMULERET HYPPIGHED %
100 NORMALFORDELTE OBSERVATIONER (μ,z)=(30,5)
SIMULERET PÅ DATAMASKINE
95
90
80
70
60
50
40
30
20
10
5
SANDSYNLIGHEDSPAPIR
BRUDSTYRKE MN/m²
20
22
24
26
28
30
32
34
36
38
40

Fig. 2.

Det er da også almindelig anerkendt, at man kan regne "betons trykstyrke" normalfordelt. I de følgende udredninger vil vi benytte normalfordelte tal genereret på datamaskine i stedet for "ægte betondata". Derved får vi mulighed for en langt mere omfattende undersøgelse.

På figur 3 er vist frekvensfunktionen for en normalfordeling. Funktionsudtrykket er skrevet op. Det indeholder 2 parametre, μ og Z. μ er middelværdien. Også Z's betydning fremgår af figuren.

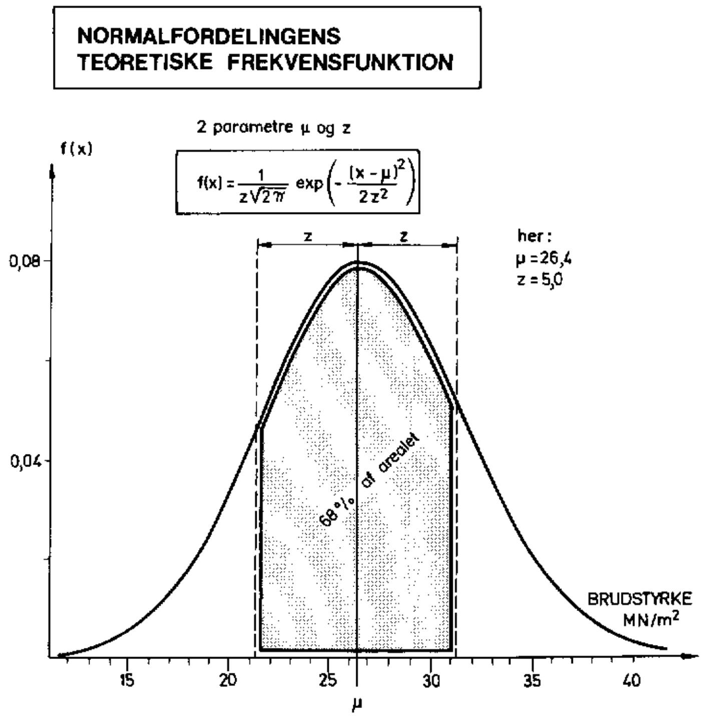


Fig. 3.

Hvis der foreligger n observationer

$$x_1,\ x_2\ \dots\ x_n$$

af en normalfordelt usikker størrelse, vil gennemsnittet σ_m, defineret ved

$$\sigma_m = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

ligge i nærheden af μ, medens spredningen s, defineret ved

$$s = \sqrt{\frac{(\sigma_m-x_1)^2+(\sigma_m-x_2)^2+\dots+(\sigma_m-x_n)^2}{n-1}}$$

ligger i nærheden af Z.
Jo større n er, jo bedre passer det.

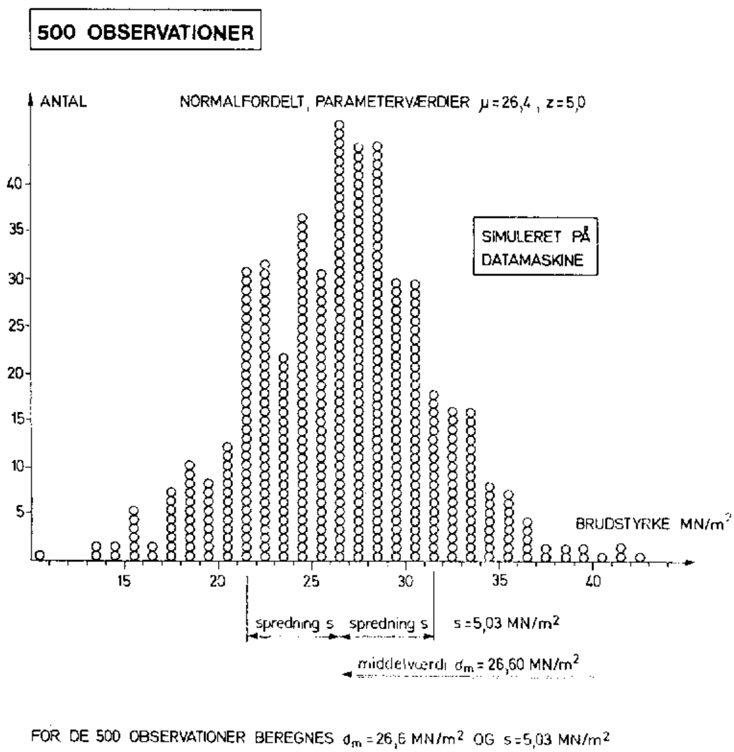


Fig. 4.

Hvis vi tager mange observationer (f.eks. 500) af en normalfordelt variabel og optegner et histogram, vil histogram og frekvensfunktion nogenlunde passe sammen. På figur 4 er optegnet histogram for 500 normalfordelte observationer genereret på datamaskine. Der er benyttet samme målestok som på figur 3. De passer også nogenlunde sammen.

Den karakteristiske trykstyrke, kontrolopgave

Efter DS 411 udtrykkes betons trykstyrke talmæssigt ved en karakteristisk værdi, σ'_{bk}. Ved den karakteristiske værdi forstås 10%-fraktilen, dvs. den værdi 10% af måleresultaterne vil befinde sig under ved uendelig mange målinger.

Hvis der er uendelig mange målinger, vil histogrammet for målingerne falde sammen med frekvensfunktionen for den tilsvarende normalfordeling. Der er mange muligheder for at give en beton en bestemt σ'_{bk}. På figur 5 er vist 4 forskellige betoner, som alle har samme σ'_{bk} = 20 MN/m^2.

På den ene yderfløj ligger en med parametrene μ = 22.6 MN/m^2, Z = 2 MN/m^2; på den anden yderfløj har vi μ = 26.4 MN/m^2, Z = 5 MN/m^2. μ er middelværdien og svarer i praksis til proportioneringsstyrken. Z er spredningen. Jo mere variation man har på sin betonproduktion, jo større er Z. Vi ser, at man kan opnå en bestemt σ'_{bk} enten med lille spredning (Z) og lille proportioneringsstyrke (μ) eller med stor spredning og stor porportioneringsstyrke. Derved opstår der et økonomisk balancespil, for det koster penge at have lille spredning; til gengæld kan man nøjes med mindre proportioneringsstyrke, dvs. mindre cement. Omvendt, hvis man ligger på den anden yderfløj.

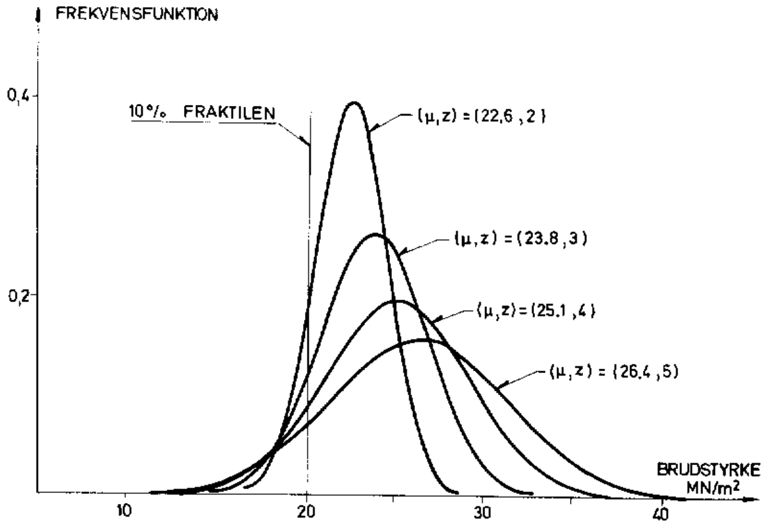
DS 411 arbejder kun med 10 forskellige σ'_{bk}, som kan foreskrives til betonkonstruktioner, nemlig som vist i tabel 2 nedenfor.

FORESKREVNE σ'_{bk} i MN/m^2

5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

Tabel 2.

MANGE FORDELINGER KAN GIVE SAMME σ'_{bk}



4 FORDELINGER SOM ALLE HAR 10% -FRAKTILEN = 20 MN/m²

Fig. 5.

Når vi har udstøbt en beton, har vi fået en σ'_{bk}, som kaldes den opnåede σ'_{bk}.

Kontrolopgaven er at undersøge, om

$$\boxed{\text{opnåede } \sigma'_{bk} \geqq \text{ foreskrevne } \sigma'_{bk}}$$

Totalkontrol

Som et tankeeksperiment forestiller vi os i første omgang, at kontrolopgaven løses ved en totalkontrol. Dvs. al beton udstøbes til cylindre og prøves. De 10% dårligste tælles fra, og den bedste heriblandt angiver 10%-fraktilen. Dvs. den svarer til den opnåede σ'_{bk}. Er den over den foreskrevne σ'_{bk}, kan betonen godkendes.

Lad os sige, at de 500 observationer fra figur 4 er en totalkontrol. Lad os desuden sige, at den foreskrevne σ'_{bk} = 20 MN/m². Ved optælling på figur 6 finder vi opnået σ'_{bk} = 20.41 MN/m². Dvs. betonen skal godkendes.

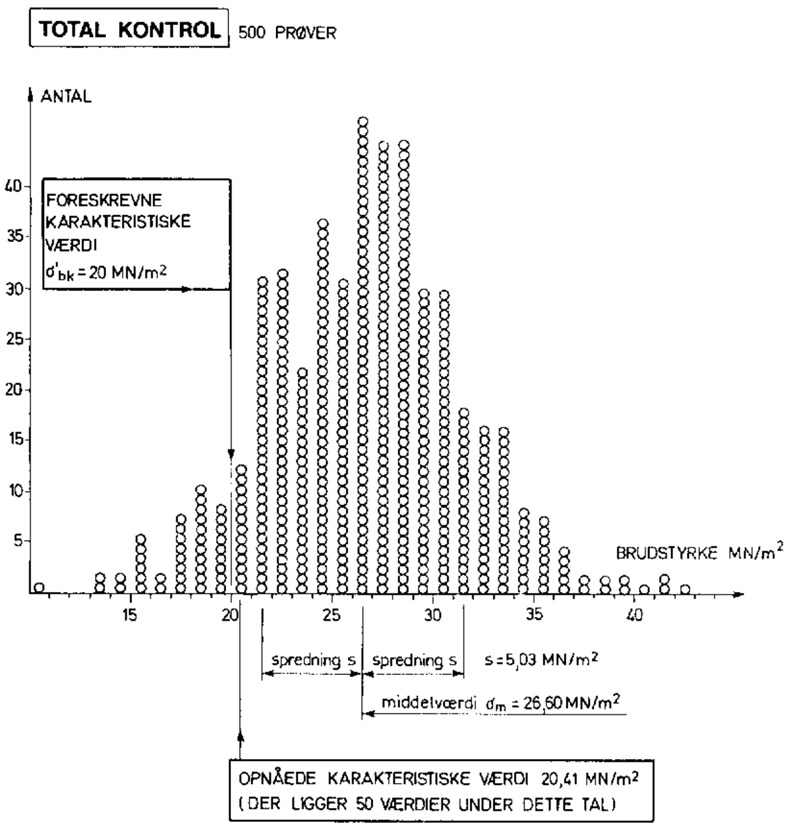


Fig. 6.

For de 500 observationer er udregnet middelværdi $\sigma_m = 26.60$ MN/m^2 og spredning $s = 5.03\ MN/m^2$.

Da der er så mange observationer, gælder som ovenfor nævnt, at trykstyrken er normalfordelt med $\mu \sim 26.6\ MN/m^2$ og $Z \sim 5.03\ MN/m^2$. For normalfordelingen ligger 10%-fraktilen på

$$\mu - 1.28 \cdot Z = 26.6 - 1.28 \cdot 5.03 = 20.16\ MN/m^2,$$

hvilket ikke er langt fra den virkelige 10%-fraktil. Vi ser, at normalfordelingstilnærmelsen passer meget godt.

Stikprøvekontrol

Men det er urealistisk at foretage en prøvning af al betonen (der bliver jo ikke noget tilbage til bygværket). Derfor må vi se på en stikprøvekontrol i stedet for.

Ved en stikprøvekontrol skal vi tilfældigt udtage et lille antal prøver af den samlede mængde. Vi vil gerne have en vurdering af, hvor meget man kan klare med en stikprøvekontrol. Derfor vil vi se på et eksempel.

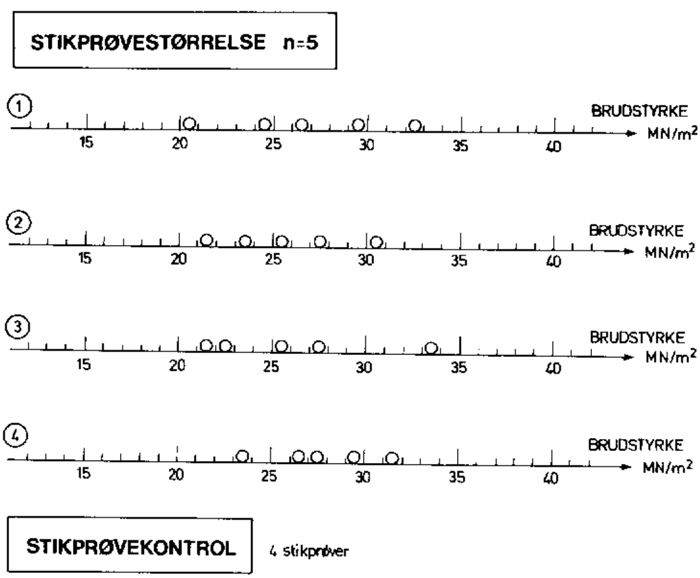


Fig. 7.

Vi vælger en stikprøvestørrelse på 5. Derefter udtages tilfældigt 4 stikprøver af de 500 på figur 4, idet vi som ovenfor forestiller os, at de 500 svarer til totalkontrollen. Resultatet ses i figur 7. At de udtagne værdier er tilfældige værdier sikrer vi os ved at skrive alle 500 værdier på hver sin seddel. De kommes i en kasse, og der trækkes ialt 4 × 5 gange med tilbagelægning. Figur 7 viser, at de 4 stikprøver er faldet ret forskelligt ud. Det kan være vanskeligt at se, hvorledes nogen af dem kan fortælle om betonen er i orden eller ej. Hvis vi opstiller et godkendelseskriterium for stikprøven, kan det ikke i alle tilfælde sikre os, at betonen kun bliver godkendt, hvis opnået $\sigma'_{bk} \geqq$ foreskreven σ'_{bk}. Der vil være en vis risiko for at godkende for dårlig beton, men omvendt også en vis risiko for at forkaste beton, der er god nok.

Normens krav til godkendelseskriteriet

DS 411 kræver, at sandsynligheden for at godkende en beton, hvor den opnåede σ'_{bk} er mindre end den foreskrevne σ'_{bk}, ikke må overstige 25%.

Vi skal opbygge et sådant kriterium. Det skal naturligvis udnytte stikprøveinformationen bedst muligt. Hvis vi med en stikprøvestørrelse på n får resultaterne

$$x_1, x_2, \ldots, x_n,$$

kan vi udregne middelværdi

$$\sigma_m = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$$

og spredning

$$s = \sqrt{\frac{(\sigma_m - x_1)^2 + (\sigma_m - x_2)^2 + \ldots + (\sigma_m - x_n)^2}{n-1}}$$

Dermed har vi trukket megen information ud af stikprøven. Mange synes, at beregningen af σ_m og især af s er besværlig. Det er også rigtigt, hvis det skal gøres ved håndkraft. Imidlertid findes der på markedet en lang række lommeregnere (også til meget lave priser), som efter indtastning af de n talværdier umiddelbart giver σ_m og s blot ved tryk på to knapper.

Udregningen er foretaget for de 4 stikprøver fra figur 7. Resultatet er vist på figur 8.

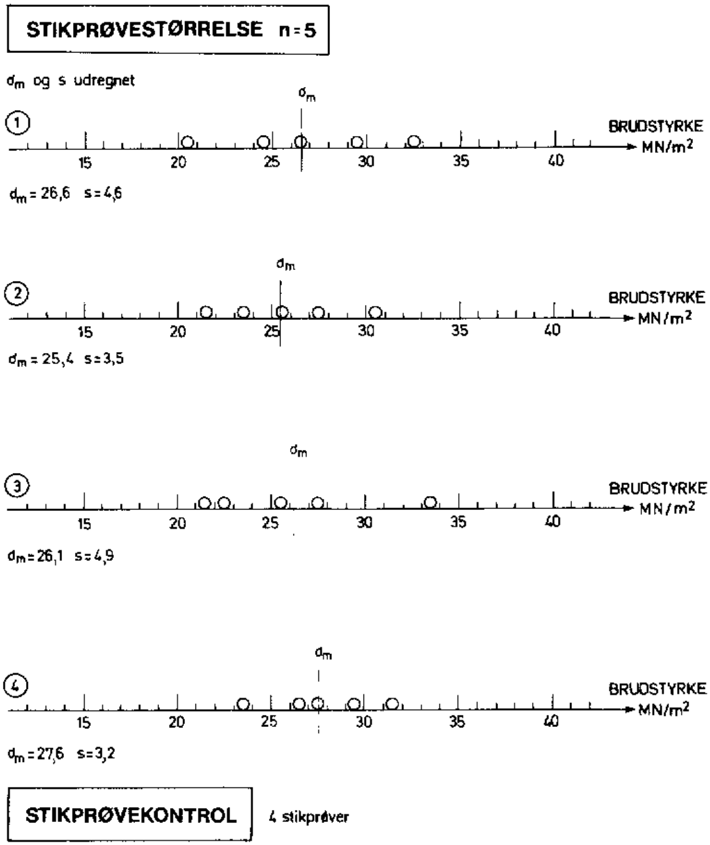


Fig. 8.

Næste problem er at opstille et godkendelseskriterium, som udfra σ_m og s tager stilling, idet det ovenfor nævnte normkrav efterleves. Et forslag er

godkend betonen,	hvis	$\sigma_m - k \cdot s \geq \sigma'_{bk}$,
afvis betonen,	hvis	$\sigma_m - k \cdot s < \sigma'_{bk}$,

hvor k afhænger af stikprøvestørrelsen n.

Bestemmelse af k for n = 5

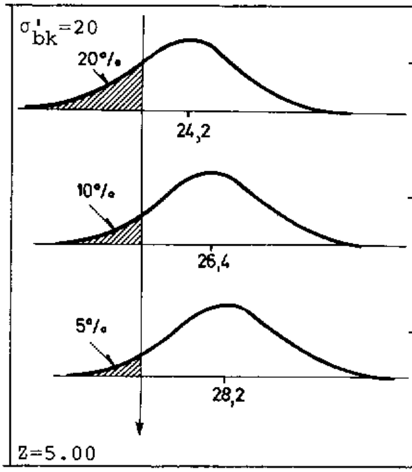
For at vurdere, hvor k skal ligge, undersøger vi for 3 værdier af k og for 3 forskellige betonkvaliteter, hvor mange gange kriteriet godkendes, hvis der 10.000 gange udtages en stikprøve på 5. Vurderingen er ikke foretaget med virkelige betondata, det ville være praktisk uoverkommeligt. Den er derimod foretaget på tal, genereret på en datamaskine. Datamaskinen er programmeret, så den også udregner σ_m og s. Derefter tæller den op, hvor mange godkendelser, der har været. Ved betonkvaliteterne er medtaget én, hvor 20% ligger under σ'_{bk} (dvs. en der er for dårlig), én hvor 10% ligger under σ'_{bk} (den er lige på grænsen) og endelig én, hvor 5% ligger under σ'_{bk} (den er for god). Man kalder i øvrigt den procentdel, der ligger under σ'_{bk}, defektprocenten. Resultatet er vist på figur 9.

Forsøg på at bestemme k for n = 5:

KONTROLREGEL: godkend, hvis $\sigma_m - k \cdot s \geq \sigma'_{bk}$ ← foreskrevet

For 3 betonkvaliteter og for 3 værdier af k prøves 10.000 stikprøver.

Heraf godkendes:



k = 1.90	k = 1.96	k = 2.05
1097	1015	885
2710	2543	2274
4520	4233	3869

Fig. 9.

Normernes krav kan også udtrykkes som, at er defektprocenten større end 10%, må højst 25% godkendes. Figur 9 viser, at for defektprocent = 10, ligger k = 1.96 nærmest ved 25% godkendte, nemlig 2543 godkendelser ud af 10.000). Derfor sætter vi k = 1.96 for n = 5. I DS 411 er alle k-værdier opgivet. Der er medtaget nogle eksempler i tabel 3 nedenfor.

n	k
3	2.50
4	2.13
5	1.96
6	1.86
10	1.67
20	1.53
30	1.47
∞	1.28

Tabel 3.

Godkendelsesprocenten og bestemmelse af proportioneringsstyrken

Vi prøver godkendelseskriteriet på de 4 stikprøver fra figur 8. Resultatet ses på figur 10. Vi vidste fra totalkontrollen at opnået σ'_{bk} er større end foreskreven σ'_{bk}. Alligevel godkendes kun i ét ud af de 4 tilfælde. Det er desværre en konsekvens af beslutningsreglen, hvis den opnåede σ'_{bk} lige ligger en anelse over den foreskrevne σ'_{bk}. Producenten kan selvfølgelig ikke leve med at ca. 3 ud af 4 ikke godkendes. Han kan sætte godkendelseshyppigheden i vejret ved at gøre den opnåede σ'_{bk} større, dvs. ved at gøre defektprocenten mindre.

På figur 11 ses for 6 defektprocenter og for 3 stikprøvestørrelser (5, 10, 20), hvor mange gange beslutningsreglen godkender ved 10.000 stikprøvetagninger. På figur 12 er godkendelsesprocenten tegnet ind for de 3 stikprøvestørrelser.

Vi ser, at jo større stikprøvestørrelse, jo større er godkendelsesprocenten ved en fast defektprocent.

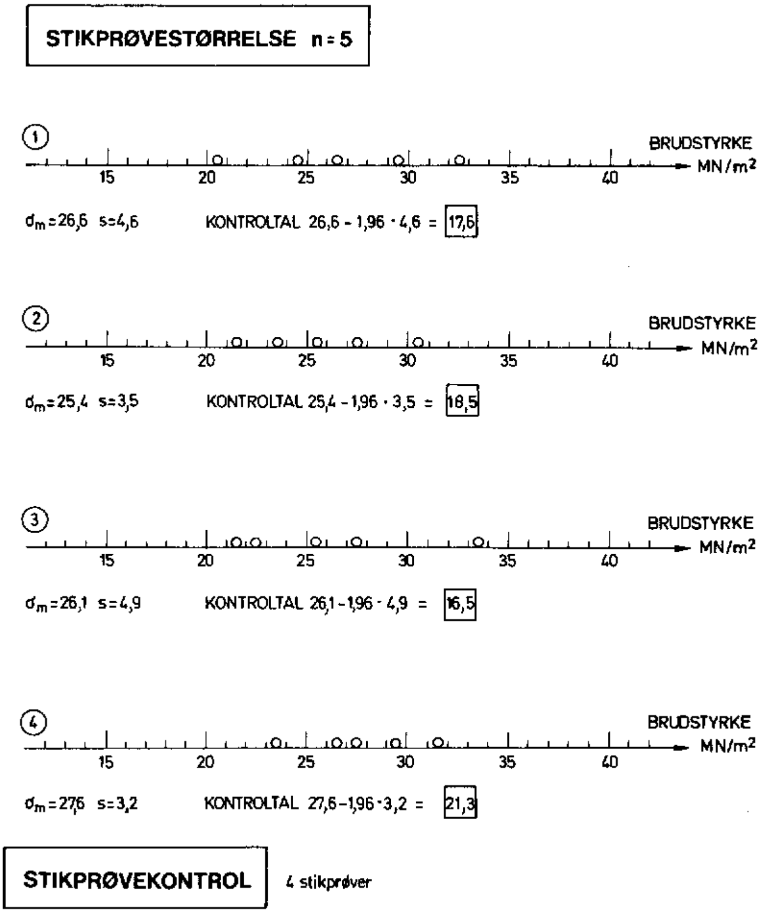


Fig. 10.

Ved normalfordelingen, som er vor model af variationerne for betons trykstyrke, er der en fast sammenhæng mellem defektprocent, foreskreven karakteristisk σ'_{bk}, middelværdi μ (proportioneringsstyrke) og spredning Z. Sammenhængen udtrykkes ved

$$\mu = \sigma'_{bk} + \alpha \cdot Z,$$

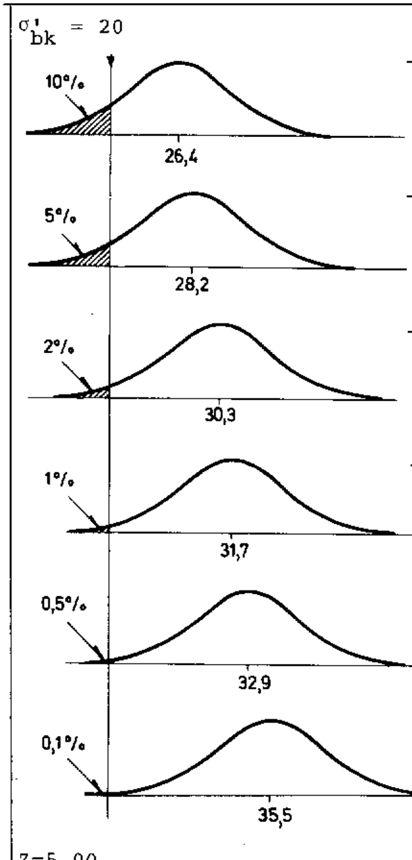
hvor α afhænger alene af defektprocenten. På figur 13 vises α for de 6 defektprocenter vi før har betragtet.

Vi kan ud fra værdierne på figur 11 og 13 opskrive, hvor mange der ikke er godkendt ved de 6 benyttede defektprocenter. Den tilsvarende procentdel betegnes påtaleprocenten eller påtalerisikoen. Desuden medtages de tilsvarende α-værdier. På figur 14 er det gjort for stikprøvestørrelsen 10.

<u>Hvordan får man en passende godkendelsesprocent?</u>

For 6 betonkvaliteter og for 3 stikprøvestørrelser prøves 10.000 stikprøver.

$\sigma_m - k \cdot s \geq \sigma'_{bk}$ godkender:



n = 5	n = 10	n = 20
2545	2505	2575
4196	5309	6619
6201	8110	9449
7425	9164	9911
8241	9670	9991
9370	9972	10000

Fig. 11.

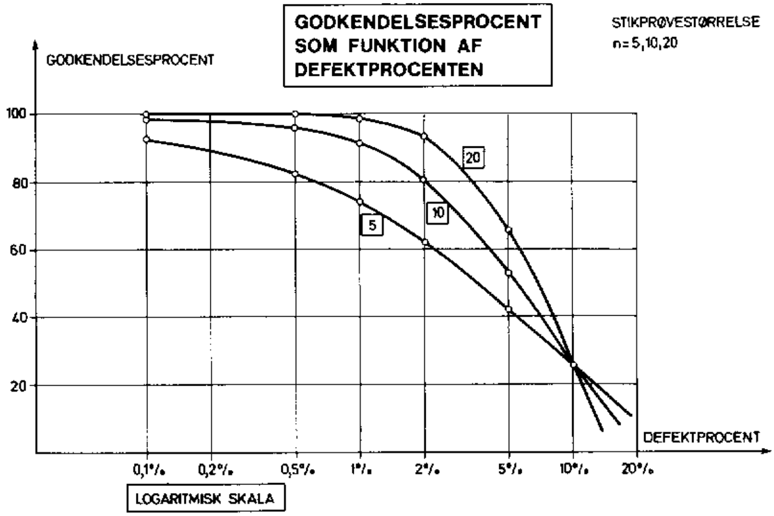


Fig. 12.

På figur 15 har vi afsat påtaleprocenten (påtalerisikoen) ud af den ene akse og α ud af den anden akse. Derefter er sammenhængen, bestemt ud fra de tidligere figurer, indtegnet for stikprøvestørrelserne 5, 10 og 20.

Figur 15 kan bruges, når vi skal fastlægge vor proportioneringsstyrke (μ): Når der foreligger et σ'_{bk} og en stikprøvestørrelse n, skal vi gøre op med os selv, hvilken risiko vi tør løbe for at betonen ikke bliver godkendt.

Det behøver ikke at være rent gætteri, men skal snarere komme af, at vi vurderer de økonomiske konsekvenser ved manglende godkendelse overfor ekstraomkostninger ved at mindske risikoen. Når vi har fundet frem til den optimale risiko, går vi ind på figur 15 og finder det tilsvarende α. Vor proportioneringsstyrke fås da af udtrykket

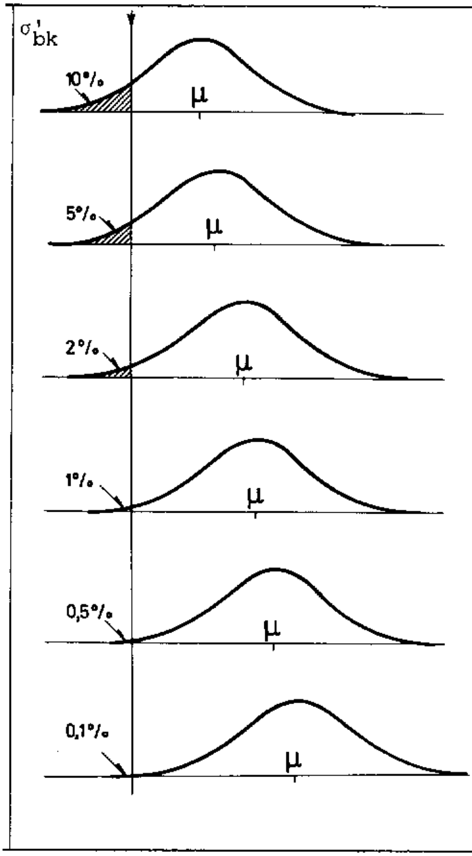
$$\mu = \sigma'_{bk} + \alpha \cdot Z.$$

Her er Z den spredning vi har på vor produktion. Normalt kender vi den fra vor tidligere producerede beton, hvis vi kører videre med samme materialer og samme udstyr.

Kender vi den ikke fra tidligere, må vi skønne et tal i overkanten (højt Z giver højt μ, dvs. meget cement), da det er på den sikre side. F.eks. kan vi benytte $Z = 5\ MN/m^2$.

Sammenhæng mellem μ og defektprocent:

Normalfordelt (μ, Z)



$\mu = \sigma'_{bk} + \alpha \cdot Z$

α
1.18
1.65
2.05
2.33
2.58
3.09

Fig. 13.

Eksempel:

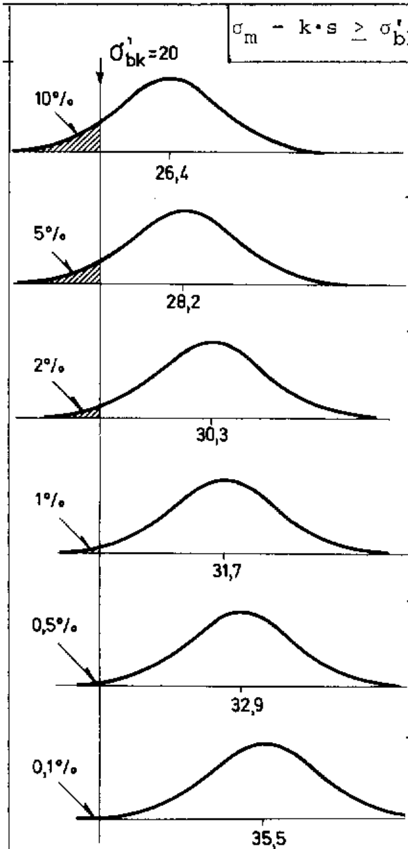
Der er foreskrevet en proportioneringsstyrke σ'_{bk} = 20 MN/m². Der vælges en stikprøvestørrelse på 10 og en påtalerisiko på 2%. Ud fra kendskab til den aktuelle produktion regnes med en spredning Z = 4 MN/m².

Figur 15 giver med påtalerisiko = 2% og n = 10, at α = 2.7. Proportioneringsstyrken bliver da

$$\mu = \sigma'_{bk} + \alpha \cdot Z = 20 + 2.7 \cdot 4.0 = \underline{30.8\ \mathrm{MN/m^2}}.$$

Sammenhæng mellem α og påtaleprocent for n = 10:

Der prøves 10.000 stikprøver for 6 betonkvaliteter.



$\sigma_m - k \cdot s \geq \sigma'_{bk}$ påtaler ↓	påtale-procent	α
7495	75%	1.28
4691	47%	1.65
1890	19%	2.05
836	8.4%	2.33
330	3.3%	2.58
28	0.3%	3.09

Z=5.00

Fig. 14.

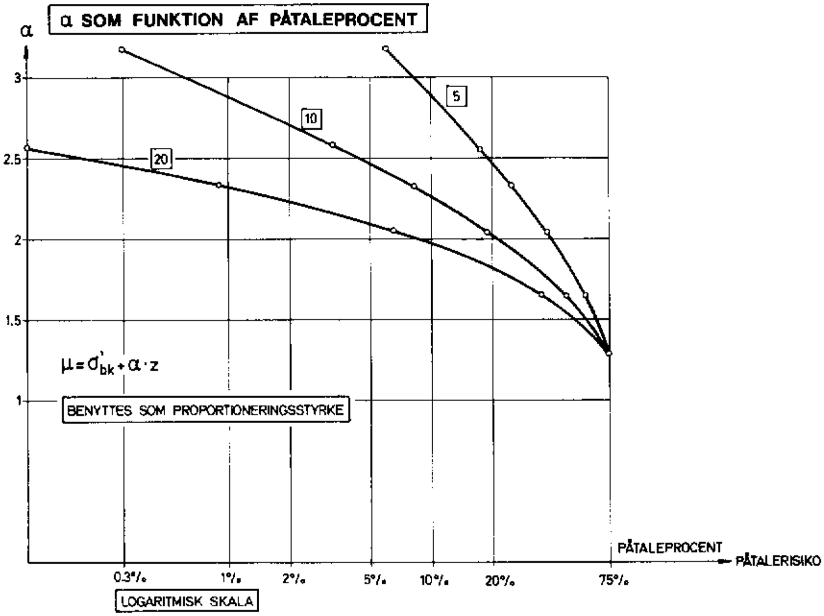


Fig. 15.

<u>Godkendelseskriterium og bestemmelse af proportionerings-styrke, hvis spredningen Z er kendt</u>

Normernes godkendelseskriterium

$$\sigma_m - k \cdot s \geq \sigma'_{bk}$$

forudsætter, at vi regner betontrykstyrken normalfordelt, men at vi i øvrigt ikke har noget kendskab til de to parametre μ og Z.

Ved bestemmelse af proportioneringsstyrken skulle vi imidlertid bruge en værdi for Z. Hvis vi har en betonproduktion kørende, har vi derfra en del information om spredningen. Hvis spredningen gennem en periode ikke har ændret sig særligt, kan vi sige, at Z er kendt. Ved kontrollen af den nye beton har vi derfor udover stikprøveinformationen også vor viden om Z. Det betyder, at der bliver mindre usikkerhed i stikprøvens udsagn om den foreliggende beton, end hvis Z ikke var kendt.

Hvis vi gennem vor produktionsstyring kan dokumentere, at Z er konstant, kan vi benytte det mere fordelagtige godkendelseskriterium

godkend betonen, hvis $\sigma_m - k_k \cdot Z \geq \sigma'_{bk}$.

k_k findes af tabel 4 nedenfor for forskellige værdier af stikprøvestørrelser. Til sammenligning er medtaget normernes k-værdier for ukendt Z.

n	Z kendt k_k	Z ukendt k
3	1.67	2.50
4	1.62	2.13
5	1.58	1.96
6	1.56	1.86
10	1.49	1.67
20	1.43	1.53
30	1.40	1.47
∞	1.28	1.28

Tabel 4.

Vi vil foretage en vurdering af de to godkendelseskriterier på de samme stikprøveværdier.

For 6 defektprocenter er der foretaget 10.000 genereringer af en stikprøve på 10. Resultatet fremgår af figur 16.

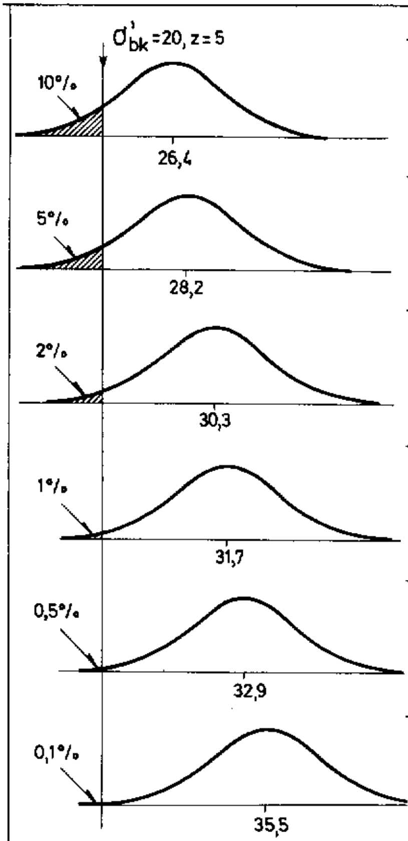
På figur 17 er for stikprøvestørrelserne 5 og 10 samt for både kendt Z og ukendt Z indtegnet godkendelsesprocenten som funktion af defektprocenten. Det ses, at n = 5, kendt Z falder næsten oveni n = 10, ukendt Z. Man kan som en håndregel nøjes med det halve stikprøvetal, hvis Z er kendt i forhold til Z ukendt, hvis der sigtes mod en bestemt godkendelsesprocent.

α fra proportioneringsstyrkeformlen findes for stikprøvestørrelsen 10 på figur 18.

Sammenligning af kendt og ukendt Z for n = 10:

Der prøves 10.000 stikprøver for 6 betonkvaliteter.

Der godkendes:



	kendt Z	ukendt Z	begge
10%	2555	2505	1465
5%	6900	5309	4618
2%	9664	8110	8019
1%	9961	9164	9150
0,5%	9998	9670	9668
0,1%	10.000	9972	9972

Fig. 16.

Eksempel:

Der er foreskrevet en proportioneringsstyrke $\sigma'_{bk} = 20\ MN/m^2$. Der vælges en stikprøvestørrelse på 10 og en påtalerisiko på 2%. Udfra kendskab til den aktuelle produktion regnes med en spredning $Z = 4\ MN/m^2$. Denne værdi har været meget stabil gennem nogen tid, og den nye beton skal produceres under samme forhold.

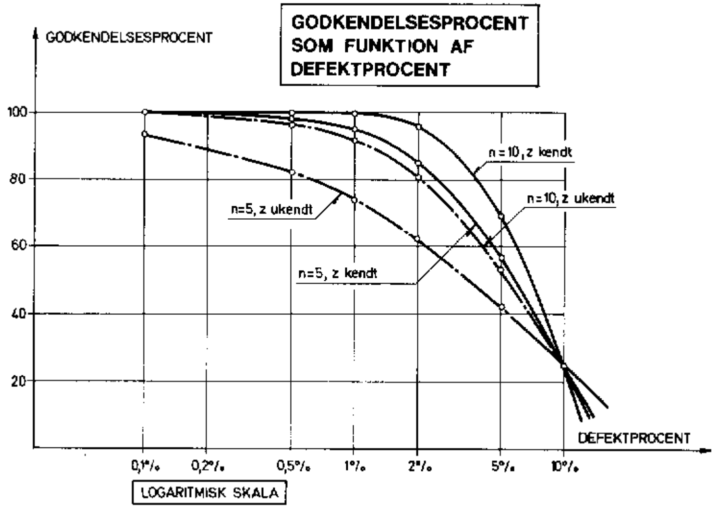

GODKENDELSESPROCENT SOM FUNKTION AF DEFEKTPROCENT
GODKENDELSESPROCENT
100
80
60
40
20
n=10, z kendt
n=10, z ukendt
n=5, z ukendt
n=5, z kendt
DEFEKTPROCENT
0,1%
0,2%
0,5%
1%
2%
5%
10%
LOGARITMISK SKALA

Fig. 17.

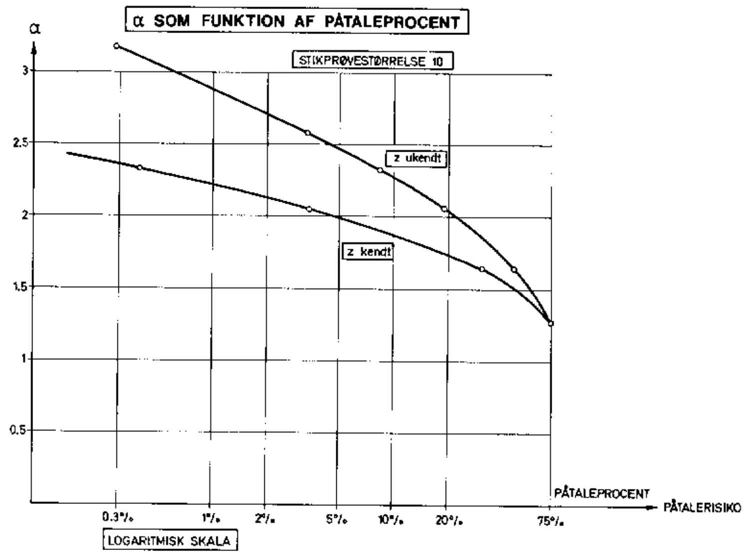

α SOM FUNKTION AF PÅTALEPROCENT
α
STIKPRØVESTØRRELSE 10
3
2.5
2
1.5
1
0.5
z ukendt
z kendt
PÅTALEPROCENT
PÅTALERISIKO
0.3%
1%
2%
5%
10%
20%
75%
LOGARITMISK SKALA

Fig. 18.

1. Hvis kontrollen foretages uden kendskab til Z, bliver proportioneringsstyrken

   $\mu = \sigma'_{bk} + \alpha \cdot Z = 20 + 2.7 \cdot 4 = 30.8\ MN/m^2$.

2. Hvis kontrollen foretages med kendskab til Z ($Z=4.0\ MN/m^2$), bliver proportioneringsstyrken

   $\mu = \sigma'_{bk} + \alpha \cdot Z = 20 + 2.2 \cdot 4 = 28.8\ MN/m^2$.

De 2 værdier for α er bestemt på figur 18.

Sammenblanding af 2 betonkvaliteter

Mange spørger om, hvilke konsekvenser en sammenblanding af 2 betonkvaliteter kan have. Det hænder nemlig, at der ved en større betonleverance med en bestemt σ'_{bk} ind imellem kan dukke læs op med en højere σ'_{bk}, hvilket jo vil give en større spredning.

Lad os betragte et eksempel:

Der skal leveres beton med $\sigma'_{bk} = 20\ MN/m^2$. Proportioneringsstyrken (μ) fastlægges udfra stikprøvetal 5, påtalerisiko 10%, $Z = 5\ MN/m^2$.

$$\mu = 20 + 2.9 \cdot 5 = 34.5\ MN/m^2.$$

Styrkefordelingen ses på figur 19 øverst.

Ved en fejltagelse er 20% af den modtagne beton fra kvaliteten $\sigma'_{bk} = 30$. Denne er fremstillet med en proportioneringsstyrke 10 MN/m^2 over den oprindelige. Styrkefordelingen for den sammenblandede beton fremgår af figur 19 nederst.

Lad os antage, at den udtagne stikprøve har følgende udseende:

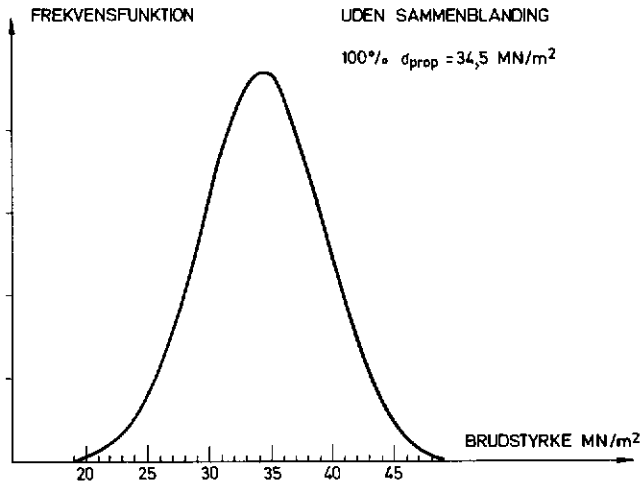
40.3   34.1   25.2   35.8   51.2 MN/m^2.

(Man kan forestille sig, at værdien 51.2 svarer til de 20% fejlleverede.)

Af de 5 tal bestemmes $\sigma_m = 37.3\ MN/m^2$, $s = 9.50\ MN/m^2$.
Kontrol:

$$\sigma_m - k \cdot s = 37.3 - 1.96 \cdot 9.5 = 18.7\ MN/m^2 < \sigma'_{bk};$$

betonen godkendes ikke.


FREKVENSFUNKTION
UDEN SAMMENBLANDING
100% σprop = 34,5 MN/m²
BRUDSTYRKE MN/m²
20
25
30
35
40
45

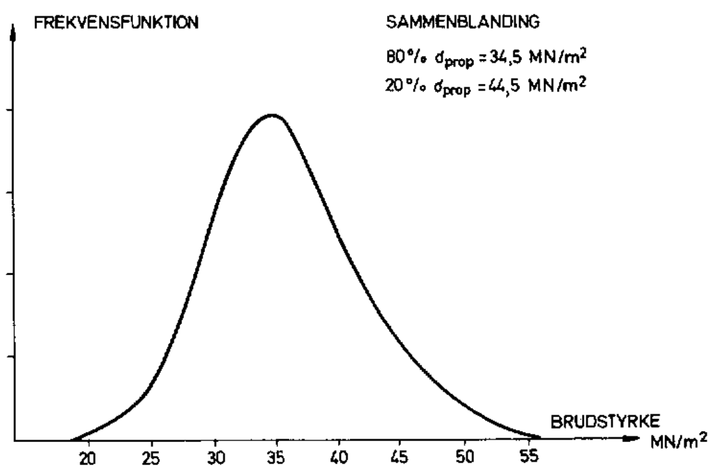

FREKVENSFUNKTION
SAMMENBLANDING
80% σprop = 34,5 MN/m²
20% σprop = 44,5 MN/m²
BRUDSTYRKE
MN/m²
20
25
30
35
40
45
50
55

Fig. 19.

Hvis man kun betragter de 4 første værdier, får man $\sigma_m = 33.9\ MN/m^2$, $s = 6.33\ MN/m^2$.

Kontrol:

$$\sigma_m - k \cdot s = 33.9 - 1.96 \cdot 6.33 = 20.4\ MN/m^2 > \sigma'_{bk};$$

betonen godkendes.

For at finde ud af, om dette er et outreret eksempel, foretages på datamaskine en generering af 10.000 stikprøver af 5. Disse stikprøver er udtaget såvel for den øverste som for den nederste fordeling på figur 19. Resultatet blev:

Ved sammenblanding	godkendes	8534	ud af 10.000
Uden	"	" 9082	ud af 10.000

Det nederste resultat svarer til den foreskrevne påtalerisiko på 10%. Vi ser, at der ikke er nogen stor forskel i godkendelsessandsynligheden.

Hvad gør udlandet?

I tabel 5 nedenfor er vist godkendelseskriterierne i 4 andre lande. Der er benyttet de betegnelser, som vi kender fra de danske normer. I ingen af de fire lande kan man selv vælge stikprøvestørrelsen.

LAND	n	Z	k/k_k	GODKENDELSESKRITERIUM
D	35	ukendt	1.65	$\sigma_m - 1.65 \cdot s \geq \sigma'_{bk}$
	15	kendt	1.65	$\sigma_m - 1.65 \cdot Z \geq \sigma'_{bk}$
	3	ukendt		$\sigma_m - 5.0 \geq \sigma'_{bk}$ $x_{min} \geq \sigma'_{bk}$
	9	ukendt		$\sigma_m - 5.0 \geq \sigma'_{bk}$ $x_{min} \geq 0.8\ \sigma'_{bk}$
NL	12	ukendt	1.52	$\sigma_m - 1.52 \cdot s \geq \sigma'_{bk}$
	6	kendt	1.52	$\sigma_m - 1.52 \cdot Z \geq \sigma'_{bk}$
GB	4	kendt	0.82	$\sigma_m - 0.82 \cdot Z \geq \sigma'_{bk}$
US	3	ukendt		$\sigma_m \geq \sigma'_{bk}$ $x_{min} \geq \sigma'_{bk} - 3.5$

Tabel 5. Kilde: CEB Bulletin No. 110

Man skal benytte den størrelse, som tabellen angiver. Det skal nævnes, at det vesttyske kriterium med n = 3 og 9 samt det amerikanske kriterium har fået en sådan form, at man ikke belønner lille spredning i samme høje grad, som man gør i Danmark. Rigtigheden af denne påstand vil fremgå af det følgende afsnit om CEB-normen, idet der desværre her er et kriterium af ovenfor omtalte form.

Hvorfor har Vesttyskland, USA og CEB et kriterium, som ikke belønner lille spredning? Sandsynligvis fordi det til gengæld ikke kræver beregning af s.

Det er imidlertid spørgsmålet, om denne regnetekniske lettelse ikke i længden bliver for dyrekøbt.

CEB-normen, udkast fra december 1976

CEB-normen definerer betons karakteristiske trykstyrke som 5%-fraktilen, dvs. den værdi under hvilken 5% af resultaterne befinder sig ved uendelig mange resultater.

Man opererer med 2 godkendelseskriterier. Det første kan bruges ved alle konstruktioner, hvor der ikke kræves særlige kontrolforanstaltninger. Det benytter en stikprøvestørrelse på 3 og lyder:

Kriterium 1, CEB

godkend betonen, hvis både

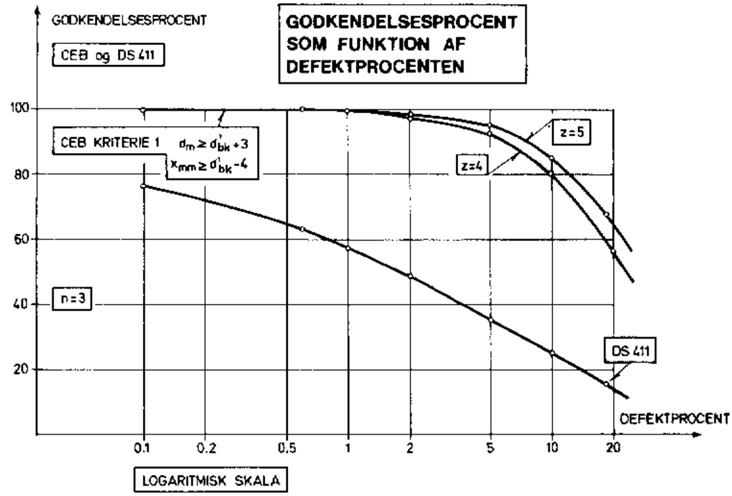
$$\sigma_m \geq \sigma'_{bk} + 3 \text{ MN/m}^2$$
$$\text{og } x_{min} \geq \sigma'_{bk} - 4 \text{ MN/m}^2 \qquad (n=3)$$

Det andet kriterium skal bruges ved alle konstruktioner, der kræver særlige kontrolforanstaltninger. Det benytter en stikprøvestørrelse større end 15 og lyder:

Kriterium 2, CEB

godkend betonen, hvis både

$$\sigma_m - 1.4 \cdot s \geq \sigma'_{bk} \qquad (n>15)$$
$$\text{og } x_{min} \geq \sigma'_{bk} - 4 \text{ MN/m}^2$$


GODKENDELSESPROCENT
GODKENDELSESPROCENT SOM FUNKTION AF DEFEKTPROCENTEN
CEB og DS 411
CEB KRITERIE 1 $\sigma_m \geq \sigma'_{bk}+3$
$x_{min} \geq \sigma'_{bk}-4$
z=5
z=4
n=3
DS 411
DEFEKTPROCENT
LOGARITMISK SKALA

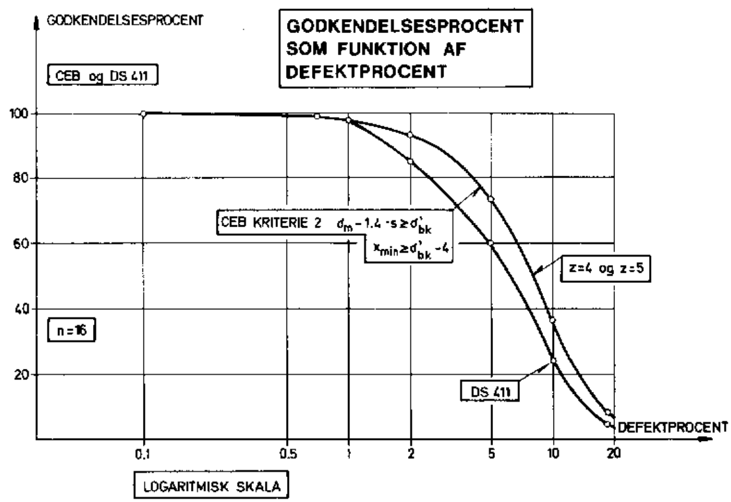

GODKENDELSESPROCENT
GODKENDELSESPROCENT SOM FUNKTION AF DEFEKTPROCENT
CEB og DS 411
CEB KRITERIE 2 $\sigma_m - 1.4 \cdot s \geq \sigma'_{bk}$
$x_{min} \geq \sigma'_{bk}-4$
z=4 og z=5
n=16
DS 411
DEFEKTPROCENT
LOGARITMISK SKALA

Fig. 20.

I modsætning til det danske kriterium er ingen af CEB kriterierne uafhængige af betonens spredning Z. Ved kriterium 2 giver forskellige Z-værdier dog kun ubetydelige forskelle. Ved kriterium 1 er der derimod store forskelle, hvis man optegner godkendelsesprocenten som funktion af defektprocenten. Det er endog således, at jo større spredning man har, jo større bliver godkendelsesprocenten for fast defektprocent. Man fristes til at sige "jo værre, jo bedre".

I figur 20 sammenlignes CEB-godkendelsesprocenterne med de tilsvarende fra DS 411, dvs. for stikprøvekontrol på henholdsvis 3 og 16. Nedenfor er på skemaform vist beregning af proportioneringsstyrken μ efter DS 411 og de 2 CEB-kriterier. De α-værdier, som er benyttet ved CEB-kriterierne, er bestemt udfra figur 20.

$\mu = \sigma'_{bk} + \alpha \cdot Z$		μ	
		$Z = 4$ MN/m²	$Z = 5$ MN/m²
n=3	DS 411	$\alpha = 3.8$ $\mu = \sigma'_{bk} + 13.2$ MN/m²	$\alpha = 3.8$ $\mu = \sigma'_{bk} + 19.0$ MN/m²
n=3	CEB Kriterium 1	$\alpha = 1.44$ $\mu = \sigma'_{bk} + 6.2$ MN/m²	$\alpha = 1.55$ $\mu = \sigma'_{bk} + 7.2$ MN/m²
n=16	DS 411	$\alpha = 2.05$ $\mu = \sigma'_{bk} + 8.2$ MN/m²	$\alpha = 2.05$ $\mu = \sigma'_{bk} + 10.3$ MN/m²
n=16	CEB Kriterium 2	$\alpha = 1.94$ $\mu = \sigma'_{bk} + 7.2$ MN/m²	$\alpha = 1.94$ $\mu = \sigma'_{bk} + 9.7$ MN/m²

I skemaet er udregnet det såkaldte styrketillæg for 8 situationer. Styrketillæget er det man skal lægge til σ'_{bk} for at få proportioneringsstyrken μ. For n = 3 ser vi, at CEB's styrketillæg ikke ændrer sig så meget, når vi går fra Z = 5 til Z = 4 MN/m². Dvs. at CEB-normen ikke belønner producenten med den lille spredning, og det er vel ikke rimeligt.

Anden litteratur om normer og statistik

Der skal henvises til A.D. Herholdts skrift fra 1974: "Normkrav og statistik". Det er udgivet i serien "BETON-TEKNIK" fra CtO.

Symbolliste

μ Parameter fra normalfordelingen. Angiver middelværdien for fordelingen. Svarer til betonens proportioneringsstyrke.

Z Parameter fra normalfordelingen. Angiver spredningen for fordelingen.

σ_m Den gennemsnitlige styrke for en stikprøve.

s Styrkespredningen for en stikprøve.

x_i Den i'te prøve fra en stikprøve.

n Stikprøvestørrelsen.

σ'_{bk} Betons karakteristiske trykstyrke.

α Faktor, der angiver sammenhængen mellem σ'_{bk}, μ, Z. Sammenhængen er givet ved $\mu = \sigma'_{bk} + \alpha \cdot Z$.

k Faktor i kontrolformlen for betons trykstyrke, når Z er ukendt (godkend, hvis $\sigma_m - k \cdot s \geq \sigma'_{bk}$).

k_k Faktor i kontrolformlen for betons trykstyrke, når Z er kendt (godkend, hvis $\sigma_m - k_k \cdot Z \geq \sigma'_{bk}$).