

# **DBF**

**Seminar om  
BRUDMEKANIK**

**PUBLIKATION 6: 1977  
DANSK BETONFORENING**



Dansk Betonforening

B R U D M E K A N I K

Indlæg præsenteret på Nordisk Betonforbunds  
forskningsseminar om "Brudmekanik"  
afholdt i Aalborg den 29. september 1977

København, februar 1978

Indholdsfortegnelse:

	Side
Forord .....	3
Program for seminaret .....	4
Deltagerliste .....	5
<i>Åke Grudemo:</i>	
Synspunkter på typer af mikrosprickor i cementpastematriksen og deres betydelse for materialets brotthållfasthet .....	7
<i>Ole Hejgaard:</i>	
Forskellige former for trækforsøg med beton .....	27
<i>Arne Hillerborg:</i>	
Ny modell för sprickors uppkomst og utveckling samt dess tillämpning på beton .....	43
<i>Mats Modéer:</i>	
Brottmekaniska beräkningar och försök för betong ....	57
<i>Bjarne Jensen:</i>	
Beton som plastisk materiale .....	83
<i>Hans Henrik Bache:</i>	
Brudproblemer med højstyrkebeton .....	97
<i>Per-Erik Petersson:</i>	
Brottmekanisk beräkning av korttids- och lång- tidshållfasthet hos betong med hjälp av FEM .....	99
<i>Odd E. Gjerv:</i>	
Notch sensitivity and fracture toughness of concrete	111
<i>Göran Fagerlund:</i>	
Sprickutbredning och hållfasthet vid dynamisk belastning .....	127

## FORORD

Imellem de store, oversigtskabende betonforskningskongresser, der fremover afholdes hvert 3. år., tager Nordisk Betonforbunds Forskningskomité initiativ til afholdelse af 1-dags forskningsseminarer om enkeltemner for et begrænset antal specialister.

Formålet med disse seminarer er at skabe et forum for specialister inden for det pågældende emneområde og at skabe mulighed for nordisk samarbejde og koordinering af forskningsarbejdet på området. Gennem publikation af de indlæg, der præsenteres på seminarerne, sikres det, at forskningsresultaterne når ud til en bredere kreds.

Forskningsseminarerne er blevet en stor succes. Med emneområdet BRUDMEKANIK blev det 7. seminar afholdt i Aalborg den 29. september 1977 med Aalborg Portland, Cement- og Betonlaboratoriet som vært. Baggrunden for valget af dette emne er, at den beton-teknologiske udvikling i de senere år har skabt grundlaget for at fremstille og anvende materialet beton til bygge og anlægsvirksomhed og til præfabrikerede byggeprodukter på et væsentligt højere styrkeniveau end tidligere. Ved udnyttelsen af så høje trykstyrker som f.eks.  $80-100 \text{ MN/m}^2$  eller endnu højere bliver spørgsmålet om betonmaterialets brudmæssige egenskaber af større betydning end hidtil. Hensigten med seminaret var at bringe de forskere i Norden, der arbejder med disse spørgsmål i kontakt med hinanden, for derigennem at skabe et overblik over forskningens stade.

Den foreliggende publikation indeholder de fleste af de indlæg, som blev præsenteret på seminaret.

P. Nepper-Christensen



NORDISK BETONFORBUNDS FORSKNINGSKOMITÉ

FORSKNINGSSEMINAR OM BRUDMEKANIK, 29. SEPT. 1977 I AALBORG

\*\*\*\*\*

Deltagerliste

Finland: Dipl.ing. Kari Nikkari  
Statens tekniska forskningscentral  
Betongtekniska laboratoriet  
02150 ESBO 15 FINLAND

Sverige: Civiling. Göran Fagerlund  
Cement- och Betonginstitutet  
Fack  
100 44 Stockholm 70 SVERIGE

Civiling. Åke Grudemo  
Cement- och Betonginstitutet  
Fack  
100 44 Stockholm 70 SVERIGE

Civiling. Kent Gylltoft  
Högskolan i Luleå  
S-951 87 Luleå SVERIGE

Professor Arne Hillerborg  
Byggnadsmateriallära  
Tekniska Högskolan i Lund  
Box 725  
220 07 Lund 7 SVERIGE

Civiling. Matz Modöer  
Byggnadsmateriallära  
Tekniska Högskolan i Lund  
Box 725  
220 07 Lund 7 SVERIGE

Civiling. Per-Erik Petersson  
Byggnadsmateriallära  
Tekniska Högskolan i Lund  
Box 725  
220 07 Lund 7 SVERIGE

Norge:

Dosent Odd E. Gjørv  
Institutt for bygningsmateriallære  
7034 Trondheim - NTH NORGE

Dipl. kandidat K.E. Løland  
Institutt for bygningsmateriallære  
7034 Trondheim - NTH NORGE

Danmark:

Civiling. H.H. Bache  
Aalborg Portland  
Cement- og Betonlaboratoriet  
Sølystvej 18  
9220 Aalborg Ø DANMARK

Civiling. Bjarne Jensen  
Ingeniørfirmaet Axel Nielsen A/S  
Langelinie 5-7  
5000 Odense DANMARK

Civiling. Ole Hejgaard  
Afd. for Bærende Konstruktioner  
Danmarks tekniske Højskole  
Bygning 118  
2800 Lyngby DANMARK

Civiling. P. Nepper-Christensen  
Aalborg Portland  
Cementfabrikkernes tekniske Oplysningskontor  
Rørdalsvej 44  
9220 Aalborg Ø DANMARK

Akademiing. Thorkild Rasmussen  
Aalborg Portland  
Cement- og Betonlaboratoriet  
Sølystvej 18  
9220 Aalborg Ø DANMARK

Civiling., lic.techn. Eigil V. Sørensen  
Aalborg Portland  
Cement- og Betonlaboratoriet  
Sølystvej 18  
9220 Aalborg Ø DANMARK

Civiling., lic.techn. Kaj Aagaard Sørensen  
bkf-centralen  
Elektrovej  
Bygning 371  
2800 Lyngby DANMARK



Rapport nr Fo 7716  
1977-12-08

---

SYNPUNKTER PÅ TYPER AV MIKROSPRICKOR I CEMENT-  
PASTEMATRISEN OCH DERAS BETYDELSE FÖR MATERIA-  
LETS BROTHÅLLFASTHET

Åke Grudemo  
Civilingenjör

---

CEMENT- OCH BETONGINSTITUTET  
Forskningsfunktionen

Rapporten presenterad vid Nordiska Betongförbundets  
Forskningskommittés seminarium "brottmekanik" i  
Aalborg den 29 sept 1977.

SYNPUNKTER PÅ TYPER AV MIKROSPRICKOR I CEMENT-  
PASTEMATRISEN OCH DERAS BETYDELSE FÖR MATERIA-  
LETS BROTHÅLLFASTHET

Ett poröst material består i det allra enklaste fallet av en sammanhängande, "homogen" fast fas (volyandel  $X$ ) med däri på något sätt fördelade porer (volyandel  $P$ ,  $X + P = 1$ ), antingen isolerade eller sammanhängande via mindre porer eller kapillärer. Man har gjort många försök att analytiskt beskriva styrka och brottegenskaper hos sådana material (se t ex utförlig sammanställning av G Fagerlund, Rapport 26, Institutionen för Byggnadsteknik, Tekniska Högskolan i Lund (1972)). En viss hållfasthetsegenskap  $S(X)$ , observerad enligt någon metod, kanske normerad, kan beskrivas med funktioner  $F(X) = S(X)/S(1)$  av olika typer, avtagande mer eller mindre brant från värdet 1 för  $X = 1$  till värdet 0 för  $X = 0$  eller eventuellt  $X = X_{cr}$  ett kritiskt minimivärde för fastfasvolymen. Några exempel på sådana funktioner:

$AX^2 + (1-A)X$  (irreguljärt porsystem, minimering av bärande sektionssyta)

$AX^3 + (1-A)X^2$  (statistisk fördelning av bärande element i celler, som är antingen fyllda eller tomma)

$\frac{X}{1+A(1-X)}$  (modifierad Mackenzie-modell)

$e^{-A(1-X)}$  (exponentialfunktion enligt Ryskhevich)

$X^n$  (potensfunktion enligt Balshin)

ibland specificerad till

$(X - X_{cr})^{n(X)}$ , med  $n(X)$  långsamt variabel med  $X$

den sistnämnda formen kanske den mest användbara vid analys av experimentella data, eftersom den ger mer eller mindre räta linjer i log-log-diagram över ett par tio-potenser av S-värden.

Detta betraktelsesätt innebär förenklingar i flera avseenden. Hänsyn tas inte till spänningskoncentrationer och variationer i dessa på grund av olika porformer, eller på grund av att den fasta fasen är heterogent uppbyggd. Den fasta fasen antages ha ett inneboende värde  $S(1)$  för hållfastheten, oberoende av sin strukturella uppbyggnad och av sättet för mätning av hållfastheten. Fastfasvolym och porvolym antages vara distinkta och väldefinierade storheter.

Cementpastor av varierande sammansättning och vct ( $w_0$ ) och i olika stadier av reaktion och hårdnande är material sammansatta av ett flertal typer av såväl fasta faser som porer, starkt variabla med reaktionstiden. En analys av de strukturella faktorernas inverkan på brottstyrka och brottmekanism blir därför mera komplicerad än enligt framställningen ovan. Man kan t ex göra ansatsen

$$S(X,c)/S(1,c_0) = F(X) \cdot Y(c)$$

där  $X$  = ekvivalent delvolym fast fas, ej nödvändigtvis lika med den verkliga (uppmätta) fastfasvolymen, och där  $c$  (med normvärdet  $c_0$ ) = ekvivalent porstorlek eller partikelstorlek, uttryck för den grad av finfördelning, som råder i materialet, för den strukturella uppbyggnaden av partikelelement och i fasgränserna förekommande diskontinuiteter och sprickor.

För  $X$  kan man göra ansatsen

$$X = \sum k_i v_i \quad (k_i < 1) \quad \text{med bivillkoret} \quad \sum v_i = 1$$

där  $v_i$  är den verkliga och på något sätt bestämda delvolymen av  $i$ :te fasen i det sammansatta systemet (inklusive porvolym  $v_p$ ), och där  $k_i$  = viktfaktor för fas  $i$  uttrycker graden av medverkan i hållfasthetsfunktionen  $F(X)$

Delpolymererna  $v$  av olika  $i$  i systemet ingående kristallina faser vid en viss tidpunkt eller reaktionsstadium kan bestämmas med hjälp av kvantitativ röntgendiffraktometri. Delvolymen porer (porositet)  $v_p$  kan i princip bestämmas genom kvantitativ desorptionsgravimetri eller andra alternativa metoder. Porositet i relation till brotthållfasthet är ett i viss mån svävande begrepp, som beror på vilka porer som kan anses vara av betydelse för uppkomsten av ett fortskridande brott och materialkollaps.

Det nu beskrivna sättet att behandla ett materials förmåga att tåla yttre belastning innebär givetvis förenklingar och approximationer i många avseenden. De hittills av oss utförda analyserna för cementpastor av vitt skilda vct och reaktionsgrader tyder i stort sett på att man för olika typer av brotthållfasthet (tryckhållfasthet, spräckhållfasthet, ythårdhet) kan erhålla entydiga funktionsförlopp  $F(X)$  genom att ansätta en effektiv porositet - ej lastbärande delvolym av formen

$$P = 1 - X = v_p(r) + v_{CH} + k \cdot (v_A + v_B + v_F) \text{ med } k \text{ i närheten av } 0.5$$

$v_p(r)$  = delvolym porer uppmätt vid en viss konditioneringsnivå, t ex RH ca 30%

$v_{CH}$  = delvolym kristallin kalciumhydroxid

$v_A$   $v_B$   $v_F$  = delpolymer oreagerad alit, belit, ferritfas

dvs hela den vid cementreaktionen bildade CH-volymer och ungefär hälften av den kvarvarande anhydrid-

volymen antages sakna förmåga eller möjlighet att bidra till att taga upp den spänning som förorsakar brott och kollaps hos provkroppen.

(Se Å Grudemo, CBI Rapporter 13:75, el Cembureau Seminar, Köge, May 1975.)

Styrkeegenskaperna hos ett flerfasmaterial sådant som cementpasta påverkas givetvis av de relativa volymandelarna av faser av olika styvhet, men en faktor av stor betydelse, som inte finns med i analysen ovan, är materialets inre mikrostruktur: anordningen av partiklar av olika faser relativt till varandra, form och storlek för olika partikelement, tillståndet och strukturen i fasgränserna, styrkan av bindningar av olika typer, såsom jonbindningar i kristallförband, vätebindningar i adsorberade vattenskikt, van der Waalsbindningar tvärs över fasgränser och diskontinuiteter.

Av speciellt intresse med hänsyn till den lastbärande förmågan hos cementpastematerial är mönstret, mängden och dimensionerna hos de mikrosprickor eller skarpvinkliga porer, som förekommer i varje typ av poröst material, samt möjligheterna till bildning av kontinuerliga sprickor som fortplantar sig utan högre grad av tortuositet genom strukturen. Inverkan av sådana faktorer har uttryckts helt allmänt som en funktion  $Y(c)$  i det ovan angivna sambandet.

Det tycks emellertid inte finnas något enkelt sätt att uttrycka inflytandet av kombinationen av mikrostrukturella element i kvantitativa termer, utan studier av mikrostruktur i relation till observerade mekaniska data får för det mesta begränsas till kvalitativa iakttagelser med hjälp av något slag av mikroskopimetod.

Det är oftast omöjligt att observera strukturde-  
taljer, mikrosprickor m m, i ett vanligt ljusmikro-  
skop, eftersom upplösningen inte räcker till.  
Observationer med hjälp av speciell belysnings-  
teknik gjorda av Higgins - Bailey vid notch-  
belastning av cementpasta (Cement Conference,  
Sheffield, April 1976) tyder på att det utbildas  
en sprickzon med parallella, ytterst smala och ca  
100  $\mu\text{m}$  långa mikrosprickor, som utbreder sig in-  
åt från notchen, när lasten ökar (FIG 1), och  
dessa förenas slutligen till ett genomgående,  
kollapsartat brott.

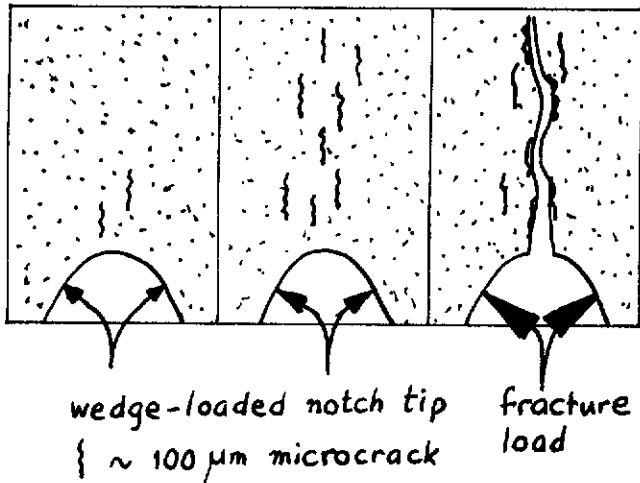


Fig 1 Utbildning av fortskridande sprickzon före brott  
vid ökande dragspänning i cementpasta (enligt Higgins och  
Bailey, mikroskopobservation)

På senare år har som bekant svepelektronmikroskop (SEM) blivit den mest använda metoden för undersökning av cementpastedstrukturer, och ett stort antal rapporter kan återfinnas i litteraturen (se t ex Williams, Progress in Materials Science 1972, och Diamond, Cement Conference, Sheffield, April 1976). Som resultat av dessa studier föreligger nu en ganska enhetlig och fullständig bild av finstrukturen i cementpastematerial av olika typer. Huvuddragen av observationsdata kan lämpligen sammanfattas i ett antal idealiserade skisser (FIG 2, 3, 6, 7).

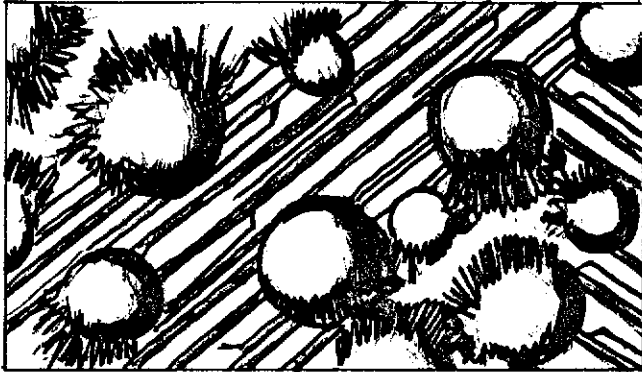


Fig 2 Tillväxt av lamellära CH-kristaller i tidigt stadium av hydrattation (enligt Greening)

FIG 2 visar tillväxten av CH-kristall-lameller i den övermättade lösningen som relativt tidigt utbildas i kapillärporerna mellan anhydridkristallerna. Enligt SEM-filmupptagningar (Greening) börjar processen från en kärna vid ytan av någon anhydridkristall och fortplantar sig mer eller mindre

explosionsartat genom lösningen, tills Ca-jonerna tar slut i närheten. Tillväxten av enkristallblocket av CH-lameller kan därvid löpa genom ett stort antal angränsande kapillärutrymmen, och vissa anhydridpartiklar kan mer eller mindre inneslutas och uppslukas av CH-kristallerna. Största delen av denna process tycks inträffa relativt tidigt i hydratationsförloppet, under de första 24 timmarna, och kan tänkas vara associerad med bindning och tidigt tillstyvnande av pastan. Det har antagits att andra joner närvarande i lösningen, Si, Al, SO<sub>4</sub> m fl, fastnar i lamellära zoner mellan kristallblocken och senare fungerar som kärnor för sprickor, när inre spänningar byggs upp i lamellblocken till följd av partikelsystemets tillväxt och förtätning vid den fortsatta gelbildningen.

På grund av CH-fasens speciella tillväxtsätt tycks det sålunda finnas risk för utbildning av långa raka lamellsprickor, som kan ge upphov till stora spänningskoncentrationer, medförande dragbrott vid låg lastnivå för en dragspänning vinkelrätt mot sprickan. Som antyds i FIG 3, kan detta fenomen tänkas inträffa speciellt vid medelstora vct ( $\omega_0$ ), omkring 0.4. Vid lågt vct fälls CH-kristaller med varierande lamellriktning ut i varje kapillärpor och blockerar därvid spricktillväxten, vid högt vct räcker inte Ca-jonkoncentrationen till för mer än lokal utfyllnad av kapillärporerna.

Det borde vara möjligt att experimentellt verifiera, om dessa variationer i CH-fasens utbildning kan urskiljas som avvikelser i hållfasthetsdata från den förväntade, med X (eller därmed jämförbar variabel) jämnt stigande funktionen F(X) (t ex den approximativt räta linjen i log S-log X-diagram). Effekter av detta slag har också konstaterats i flera materialserier i närheten av vct 0.4-0.5, speciellt vid mätning av spräck-



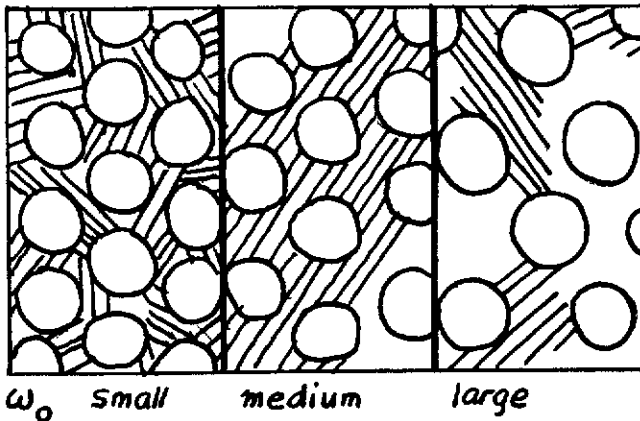


Fig 3 Hypotetisk struktur för tidig CH-fas vid olika vet

draghållfasthet  $T_{sp}$ , ej så tydligt vid bestämning av tryckhållfasthet  $C$ . (Se t ex Å Grudemo, Cembureau Seminar, Køge, May 1975). Det har emellertid visat sig svårt att ur  $T_{sp}$ -bestämningar med säkerhet fastställa detaljer i förloppet av brotthållfasthetsdata, dels på grund av den variabla och ibland betydande spridningen vid bestämning av spräckhållfasthet, dels på grund av en viss osäkerhet om vad man egentligen mäter med denna metod.

Vi har utvecklat en speciell metod för noggrann bestämning av den relativa brottstyrkenivån vid dragbelastning, som benämnts radiell böjdraghållfasthet  $B_c$  och vars princip framgår av FIG 4. Med denna metod tycks det vara generellt möjligt att väsentligt reducera förhållandet mellan

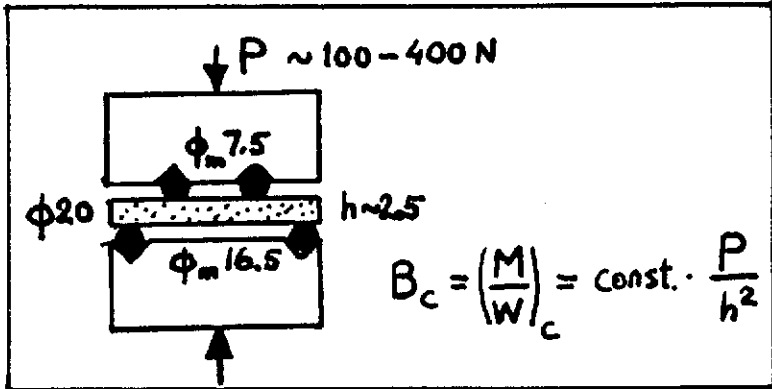


Fig 4 Bestämning av radiell böjdraghållfasthet genom belastning av cirkulär platta mellan koncentriska O-ringar (gummi).

Brotthållfasthet  $B_c = (M/W)_c =$  radiell dragspänning vid brott i centralzonens undersida, enligt Timoshenko (Theory of plates and shells, 1940, p. 68):

$$B_c = 3/4\pi \cdot \left[ (1 - \nu)(1 - b^2/a^2) - 2(1 + \nu)\ln(b/a) \right] \cdot \frac{P}{h^2}$$

där  $P = k \cdot \Delta s$  kan mätas som sammantryckning  $\Delta s$  av tryckfjädrar med fjäderkonstant  $k$  (N/mm) ( $\Delta s$  efter korrektion för O-ringdeformation).

metodspridning och materialspridning. Det beräknade felet i medelvärdet  $\bar{B}_c$  för en sats provkroppar av rimlig storlek (6-20 st) uppgår ofta till mindre än 2%, och de väsentligt större spridningar som kan förekomma, anses bero på en verklig variation i defektstruktur från den ena provkroppen till den andra i ett visst material.

Som visas i FIG 5, har den ökade noggrannheten i bestämning av draghållfasthet enligt  $B_c$ -metod

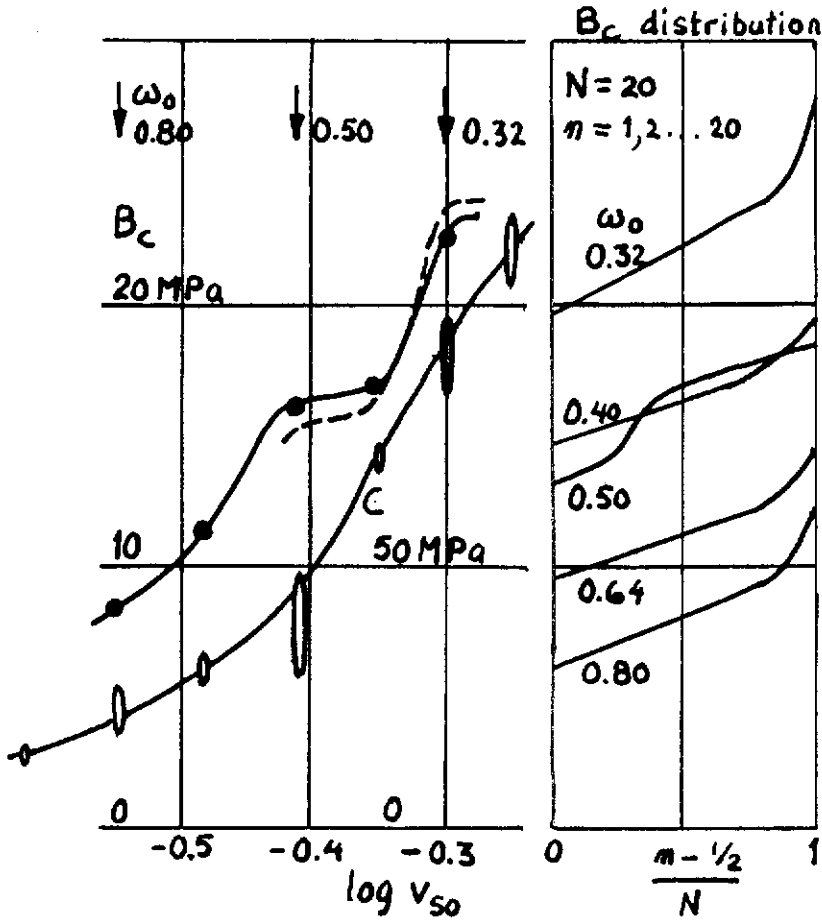


Fig 5 Hållfastheter för cementpasta efter ca 1/2 års hydratation, som funktioner av  $\log v_{so}$ , där  $v_{so}$  = initieell fastfasvolym ( $1/v_{so} = 1 + d_a \omega_0$  med  $d_a = 3.15 \text{ mg/mm}^3$ ), pasta med  $\omega_0 = 0.40$  och uppåt aerosil-stabiliserade (heldragna kurvor, streckad kurva visar  $B_c$  för pasta med  $\omega_0 = 0.28, 0.30, 0.32 \dots 0.48, 0.50$ , utan tillsats). Jämförelse mellan  $B_c$  = radiell böjdraghållfasthet och C = cylindertryckhållfasthet (cylinderprover ca 1:1 med antifriktionsmellanlägg av reffelmönstrad 0.1 mm tape +  $\text{MoS}_2$ -pasta). Till höger: fördelningskurvor för  $B_c$ -värden i satser om vardera 20 provplattor.

gjort det möjligt att med säkerhet lösa upp detaljer i brottstyrkan som funktion av en till X i princip linjärt relaterad sammansättningsvariabel, nämligen den ursprungliga volymen cement (fast fas) i en serie cementpasteblandningar.  $B_c$ -nivån är praktiskt taget konstant (16-17 MPa) i vct-området 0.5-0.4, medan den stiger snabbt med  $v_{so}$  i angränsande vct-områden. Detta kan tänkas vara en indikation för riktigheten av den hypotes för förändrade betingelser vid CH-fasens kristallisation, som skisseras i FIG 3. Det framgår vidare att C-kurvan för motsvarande materialserie stiger jämnt, utan någon synbar uppbromsning av hållfasthetsökningen med stigande  $v_{so}$ . Detta skulle antyda att tryckhållfasthetsvärden, bestämda enligt angiven metod, inte är känsliga för de förändringar i sprickstrukturen, som betingas av variationer i CH-fasens utfällning vid olika vct. C-värdena beräknas ur belastning vid kollaps av tryckbelastade provcylindrar, vilka enligt erfarenhet är mer eller mindre uppspruckna parallellt med tryckriktningen vid laster långt under den slutliga kollapslasten.

Fördelningen av  $B_c$ -värden inom de olika provserierna kan också tänkas påverkad av strukturändringar. För vct 0.32, 0.40, 0.64 och 0.80 är fördelningarna "raka", med vissa övervärden för speciellt starka provkroppar, medan fördelningen för vct 0.50 tycks vara en dubbelfördelning. Detta kan möjligen tolkas så att en del av provkropparna i denna serie innehåller defekter av en typ, som saknas i flertalet och som ger en sänkning av  $B_c$ -nivån med ca 4 MPa. Denna slutsats är givetvis ytterst osäker, men ger dock anledning att spekulera över möjligheten att genom Weibull-analys av fördelningar av  $B_c$ -värden för ett stort antal provplattor kunna urskilja defektstrukturer av olika typer i ett och samma material.

Strukturer av den typ som skisseras i FIG 6 är också rikligt förekommande i normala pastor, speciellt i tidigt stadium av reaktion och åtminstone några dagar framåt. De associeras med interaktion av sulfat och aluminat i kapillärfasen, och antages vara strukturer av ettringit-typ, fastän troligare av mera komplex sammansättning. Detta sammanhänger med närvaron av Si-joner i lösningen, vilket troligen ger samkristallisation med strukturer besläktade med thaumasit, som enligt HFW Taylor innehåller Si-joner i onormal, oktaedrisk koordinat. Dessa formationer tycks konkurrera framgångsrikt med CH-strukturer om Ca-jonerna i lösning i vissa kapillärutrymmen, och där de bildas, förekommer vanligen ingen CH-lamellbildning i omedelbar närhet. I porösa pastor förekommer dessa strukturer även efter längre tids reaktion, medan de i pastor med lägre vct bryts ned eller fylls ut, och integreras i den gelmassa som bildas vid senare stadier av cementreaktionen.

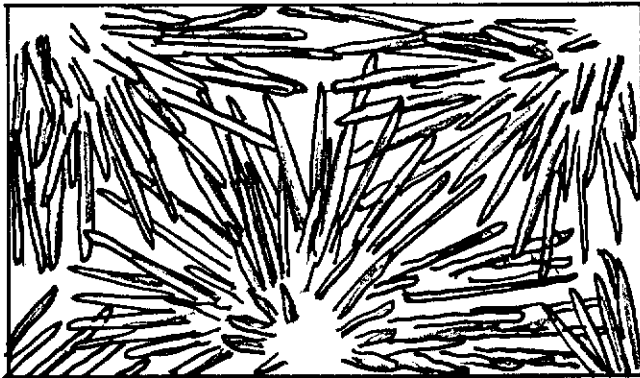


Fig 6 Utveckling av fibrös eller nålformig C-S-(A,F,S?)-H-fas i tidigt stadium av cementpastans reaktion.

FIG 7 avser att representera den karakteristiska strukturen för gelfasen i tät pasta, som närmar sig slutlig reaktionsjämvikt, som en sammanfattning av olika forskares observationer. Som visas i vänstra delen av bilden, iakttar man ofta att kärnor av ohydratiserat klinker-material efter viss tids hydratation avskiljs från omgivande gelhydrathölje, så att ett slags sfärisk eller halvsfärisk diskontinuitet eller spricka uppstår.

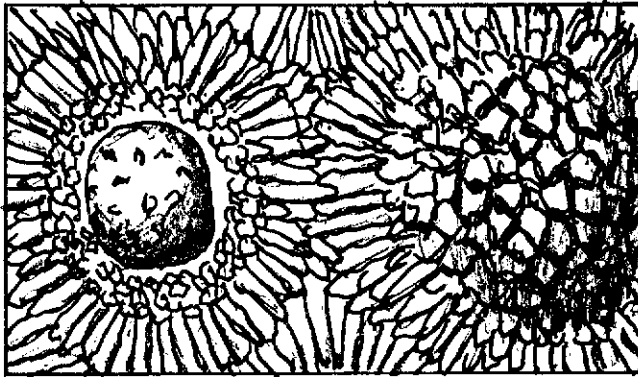


Fig 7 Idealiserad gelstruktur i tät cementpasta i långt framskridet stadium av reaktion.

Sådana mer eller mindre löst liggande kärnor kan tänkas bidra i endast ringa grad till materialets bärrighet, speciellt vid dragspänning, och kan därför i vissmån betraktas som porer (faktor  $k=0.5$  för kvarvarande anhydridmaterial, enligt ovan). Det är känt, att pastehållfastheten ökar starkt vid torkning till låg RH, speciellt  $T_{sp}$  (se t ex Å Grudemo, Cembureau Seminar, Köge, May 1975). Mekanismen bakom detta kan tänkas vara, att gel-

höljet krymper tillbaka på kärnan, varvid kohesionen återställs och bärigheten ökar.

Den inre gelen, som bildas innanför den ursprungliga kristallytan, har ritats granulär, men har ofta mera obestämd struktur. Den yttre gelen har också för tydlighetens skull skisserats på idealiserat sätt, som radiellt utstrålade kolumnära partikelelement. Kontaktzonen mellan två vid tillväxten sammanstötande yttergelhöljen (bildens mitt) antages vara den zon där de kohesiva krafterna börjar utbildas vid pastans hårdnande, och som gradvis tilltar i styrka. En del av brottytan måste nödvändigtvis utgöras av sådana zoner, som vid betraktande i SEM-bild får ett utseende som i bildens högra del, ibland beskrivs som nätverk (reticular) eller som en bikaka (honeycomb).

Denna föreställning om pastestrukturen i olika stadier av utveckling kan användas att göra sig en bild av karaktären hos svaghetszonerna och deras kombinerade inverkan på den väg som en spricka förorsakad av yttre last tar genom strukturen vid den sprickbildning som föregår brottet. Sådana sprickvägselement skisseras i FIG 8. De har där antagits bestå av lamellära sprickor mellan CH-block, radiella sprickor genom ytter- och innergelhöljen, sfäriska sprickor runt kvarvarande anhydridkärnor, och sönderslitna kontaktzoner mellan angränsande gelhöljen.

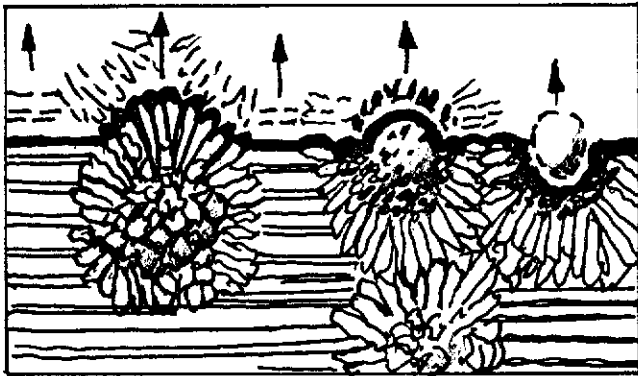


Fig 8 Tänkbara element av brottytan vid dragbrott i cementpasta: spaltytor i lamellär CH-fas, sönderslitna kontaktzoner mellan gelagregat, radiella klyvbrott genom yttergel och innergel, ytor av kvarvarande anhydridkärnor, innergelens innerytter efter avlägsnande av anhydridkärnan.

Det framgår av denna framställning, som givetvis är starkt idealiserad i olika avseenden, att cementpasta är ett kompositmaterial med i mikroskala starkt varierande motstånd mot spricktillväxt vid belastning. Detta kan leda till att en fortskridande spricka temporärt hejdas. FIG 9 antyder några kombinationer av strukturelement, som kan verka hämmande på spricktillväxten och utbildandet av en genomgående spricka.



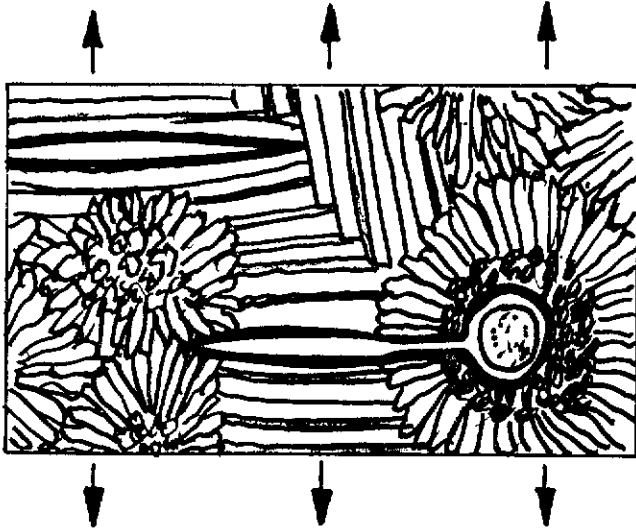


Fig 9 Mekanismer för hejdande av mikrosprickors tillväxt i cementpasta: sprickspetsen bräffar på material med större förmåga att tåla dragspänningskoncentrationen i spetsen, eller spänningskoncentrationen minskas genom åvrundning av sprickspetsen.

Stockholm den 8 december 1977

CEMENT- OCH BETONGINSTITUTET  
Forskningsfunktionen

Åke Grudemo

## SAMMANFATTNING OCH SLUTSATSER

Erfarenheter under senare år från observationer av mikrostruktur, spricksystem och hållfasthetsdata för cementpastematerial har givit en mera detaljerad och komplicerad bild än vad som tidigare antagits i fråga om systemets kohesion och de därvid verksamma strukturelementen, och i fråga om utbildningen av mikrosprickor och mekanismen för slutligt brott. Även mikrosprickor tycks vara sammansatta av element av flera olika typer, och om man på något sätt (t ex reaktiva tillsatser) skulle kunna blockera någon typ av sprickelement och därmed mikrosprickornas tillväxt, bör det finnas möjligheter att väsentligt höja systemets förmåga att tåla dragspänning och därmed brottstyrkenivån.

Cementpastans hållfasthetstillväxt i stadier av bindning och tidigt hårdnande verkar hänga samman den snabba utvecklingen av kristallin CH-fas i form av lamellblock, som i vissa delar av systemet fyller ut mellanrummen mellan de på ytan reagerade anhydridkornen. Enligt observationer tycks kohesionen i fasgränser mellan anhydridytor och CH-blockens kanter vara god, och man observerar sällan sprickor i dessa zoner. Samtidigt blockeras emellertid den fortsatta reaktionen mellan anhydrid och vatten vid dessa kontaktytor, och dessutom befrämjas uppkomsten av långa raka sprickor med skarpa spetsar av den speciella typen för CH-kristallernas tillväxt. Denna effekt kan vara särskilt utpräglad vid intermediära vct-värden. Den vidare tillväxten i hållfasthet betingas av den fortsatta C-S-H-gelbildningen och utfyllnaden av kapillärsystemets övriga delar med gel, samt utbildningen av kontaktzoner mellan från olika håll tillväxande gelhöljen. Mekanismen vid

denna reaktion är sådan, att det i vissa stadier föreligger möjlighet för bildning av diskontinuitet mellan anhydridkärna och gelhöljets innerytor. En sådan släppning i kombination med en radialspricka i angränsande gelhölje ger upphov till ett sprickelement av annan typ.

Preliminära data från studier av pasta med tillsats av miniballast (t ex sfäriska kvartskorn 0.5-1 mm) tyder på att även en ringa tillsatsmängd (ca 10 volymprocent) sänker hållfasthetsnivån med ca 30% (mätt som  $B_c$ ), men att nivån sedan håller sig konstant upp till över 50% tillsats. Detta tyder på att det är kohesion och friktion i den sfäriska diskontinuiteten eller sprickan i kontakten mellan ballastkorn och pasta, som i huvudsak bestämmer nedgången i systemets draghållfasthet, medan mängden av dylika diskontinuiteter har mindre betydelse ("weakest-link"-hypotes, alternativa förklaringar till hållfasthetssänkningar är tänkbara och skall prövas). Brukets hållfasthet tycks vara ungefär proportionell mot pastans hållfasthet, med vissa avvikelser.



AFDELINGEN FOR BÆRENDE KONSTRUKTIONER  
DANMARKS TEKNISKE HØJSKOLE  
STRUCTURAL RESEARCH LABORATORY . TECHNICAL UNIVERSITY OF DENMARK  
LUNDTOFTEVEJ 100 . BYGNING 118 . 2800 LYNGBY . TELF. (02) 88 55 11

FORSKELLIGE FORMER FOR  
TRÆKFORSØG MED BETON

Renskrift af notater brugt til

Foredrag ved

BRUDMEKANISK FORSKNINGSSEMINAR  
Aalborg den 29. september 1977

LYNGBY OKTOBER 1977  
Ole Hejgaard

TRÆKFORSØG MED BETON

1. Indledning





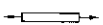
De forsøg, som skal refereres her, er hovedsagelig trækforsøg med uarmeret beton udført på LBT (nuværende Afdelingen for Bærende Konstruktionen (ABK)) på Danmarks tekniske Højskole af H.Krechel og S.Gravesen i perioden 1962-67.

Som oftest interesserer vi os mest for betonens trykstyrke, men for at kunne studere problemerne om revner i jernbetons træk- og trykzone - og i og for sig også i forskydningsfagene - må vi kende betonens trækstyrke og helst også trækarbejdsliniens form helt op til brud. Det samme gælder spørgsmålet om den uarmerede betons svind og dannelse af svindrevner, - ja selv betonens trykstyrke og hele mekanismen ved den succesive nedbrydning af betonen ved trykbelastning med dannelse af stadigt flere mikrorevner i materialets indre, hovedsageligt parallelt med påvirkningsretningen, - er til syvende og sidst faktorer, der bestemmes af betonens trækstyrke. Det er derfor af største interesse at kunne udføre rent enaksede trækforsøg med beton.

2. Forskellige muligheder for trækforsøg med beton

På Fig.1 er vist de forskellige praktiske muligheder for udførelse af trækforsøg, og vi vil se nærmere på den enkelte muligheds fordele og ulemper.

PRAKTISKE MULIGHEDER FOR TRÆKFORSØG MED BETON.

- |                         |   |  |
|-------------------------|---|--|
| 1. Frühlings-Michaelis  |  | $\sigma_{\text{g}} = \frac{P}{F}$                      |
| 2. Bøjningsforsøg       |  | $\sigma_{\text{b}}^t = \frac{M}{W}$                    |
| 3. Centrifugering       |  | $\sigma_{\text{ce}} = \frac{\gamma}{2g} \pi^2 l^2 n^2$ |
| 4. Spaltforsøg          |  | $\sigma_{\text{sp}}^t = \frac{2P}{\pi dh}$             |
| 5. Enakset prismeforsøg |  | $\sigma^t = \frac{P}{F}$                               |

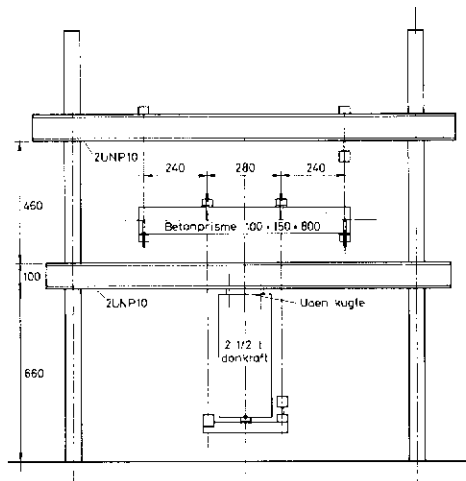
Figur 1

1. Det gamle 8-talsformede prøvelegeme benyttes næppe for alvor nogen steder i dag. Dels fås et meget uklart spændingsforløb på midterstrækningen som følge af prøvelegemets form og det koncentrerede tryk fra kløerne, dels er der jo ikke nogen egentlig midterstrækning med pæn homogen spændingstilstand, hvor tøjningerne kunne måles. Endelig vil formen med de store tværsnitsvariationer utvivlsomt give ejendommelige indre spændinger, hvis der er tale om kombineret lagring.

2. Bøjningsforsøget anvendes mange steder til praktisk kontrol, men vi ved, at bøjningsstyrken af forskellige årsager må blive noget højere end betonens rene trækstyrke. Bøjningsforsøget forudsætter Hooke's lov gældende både i træk- og trykzonen helt til brud, og det ved vi i hvert fald ikke er korrekt. Især for de stærkere betonkvaliteter er der - som vi senere skal se - en ganske kraftig krummet arbejdskurve på trækside, hvilket jo medfører en alt for høj værdi ved den simple beregning:  $\sigma_D^u = M/W$ . Dette kan dog ikke forklare den fulde overestimering, som fås ved disse forsøg. Der kan nævnes mindst to andre årsager:

- a) Der er et rent statistisk fænomen, idet det jo kun er de aller yderste lag i trækzonen, som er på maksimal belastning, altså i virkeligheden et betonavolumen nul. Sandsynligheden for, at det svageste sted i prøvelegemet skulle ligge netop her, er selvfølgelig meget, meget mindre end i vort enaksede trækprøvelegeme (se senere), hvor en 8-10 liter beton på én gang er under rent træk.
- b) Der er nok en vis virkning i retning af, at selv en begyndende, ganske fin revne fra et bøjningsprøvelegemes trækside ikke har samme evne til at frembringe et totalt brud, når det ovenfor liggende materiale ikke er så hårdt anspændt, som tilfældet er i det enaksede prøvelegeme. (De højere liggende lag nærmere 0-linien kan betragtes som virkende som en slags armering).

Det må derfor betragtes som rimeligt nok, at bøjningsforsøgene giver for høje værdier. Dertil kommer, at man mange steder udfører bøjningsforsøg med en helt ukontrollabel påvirkningstilstand med overlejlret aksialspænding og i mange tilfælde endog torsion. På Fig.2 er vist den opstilling, der blev benyttet på DTH, hvor prøvelegemet er ophængt i wirestropper. Opstillingen er i princippet helt friktions- og torsionsfri.



Figur 2: Bøjningsopstilling for betonprismer

Til slut kan nævnes, at bøjningsforsøg men kun én enkeltkraft på midten i denne forbindelse må betragtes som helt urimelig.

3. Centrifugering, hvor maskinen speedes op, til prismet bryder, er en morsom løsning på problemet; men det kræver en speciel maskine, hvor især centreringen af prøvelegemet er meget væsentlig. Dette giver naturligvis heller ikke nogen ideel spændingstilstand, da der kun er maksimal trækpåvirkning i selve omdrejningsaksen. Der er på DTH blevet bygget en speciel centrifuge til trækforsøg først og fremmest med



mursten, og den har trods alt givet et ganske godt billede af teglets trækstyrke. Desuden er der blevet støbt betonprøvelegemer i murstensformat, og disse blev afprøvet i centrifuge efter normal hærkning. Forsøgene gav det ganske pudsige resultat, at selv ved kombineret lagret beton, som forventedes at være stort set tørt, strittedes ganske betydelige mængder porevand ud i centrifugerummet. Dette forkludrer utvivlsomt resultaterne yderligere, da belastningstilstanden i brudøjeblikket ikke er nøjagtig kendt.

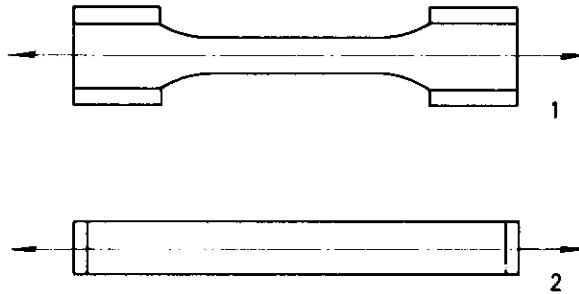
4. Spalteforsøgene er meget anvendt, idet de er lette at udføre og giver beskeden spredning. Den teoretiske spændingsfordeling i cylinderens lodrette diametralplan viser en praktisk taget konstant trækspænding over den midterste strækning slående om til kraftige trykspændinger ved mellemlægslinealerne. Den maksimale trykspænding opnås i cylinderens midte, og brud udgår da også normalt herfra (hvis mellemlægslinealerne er for smalle, kan der dog udgå partielt brud herfra først). Bestemmelse af trækspændingen  $\sigma_{sp} = \frac{2p}{\pi \cdot h \cdot d}$  forudsætter Hooke's lov gældende overalt i prøvelegemet både i tryk- og trækzone og helt til brud. Ligesom for bøjningsprøvningen giver denne beregning også en del overestimering. Hertil kommer spændinger i prøvelegemet, der skyldes betonens udtørringssvind (giver i øvrigt også et falsk billede ved bøjningsforsøgene

Under udtørringsperioden svinder betonens yderste lag først, mens materialet i kernen forbliver noget mere fugtigt. Selv om der vel ikke ligefrem sker krakeleringer i overfladen, så vil der efter en passende kombineret lagring være overlejret trækspændinger i prøvelegemets yderlag og trykspændinger i det indre. Derfor er det naturligt, at vi ved bøjningsforsøgene får noget lavere styrker og ved spalteforsøgene noget højere styrker efter en sådan kombineret lagring end efter en ren vandlagring, hvor der jo praktisk taget ikke skulle være opbygget indre spændinger i betonen .

5. Tilbage er der så de rent enaksede trækforsøg, helst naturligvis med gode store prøvelegemer med et rimeligt tværmål i forhold til betonens største stendimension - noget i retning af vore sædvanlige trykprøvelegemer.

Figur 3 viser to principielt forskellige udformninger af et trækprøvelegeme.

### Principiel udformning af prøvelegemer.



Figur 3

Man turde ikke gå ind for øverste udformning ("kødbenet"), fordi - bl.a. - at al beton fra blanding, til den er fuldt afbundet, svinder ikke så helt lidt - det såkaldte kemiske svind (har intet at gøre med udtørringssvindet) - der ville medføre, at man meget let får svage zoner i et sådant kødbensformet prøvelegeme i overgangen mellem hovederne og prøvestrækningen, eller eventuelt en svag zone et sted på prøvestrækningen, som også ville give for tidligt brud i det endelige belastningsforsøg. Dertil kommer, at det faktisk er meget vanskeligt at få overført et rent centralt træk til et sådant prøvelegemes midterdel fra de fire opspændingsflader.

Der skal næsten ingen ujævnheder til, for at man i stedet for får et bøjningsforsøg ud af det (!). Man valgte altså løsningen med de stive endebunde, og der skal her gives en nærmere beskrivelse af den praktiske udformning:

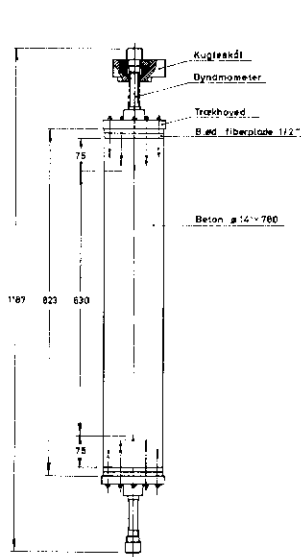


Fig. 4: Færdigt trækprøvelegeme

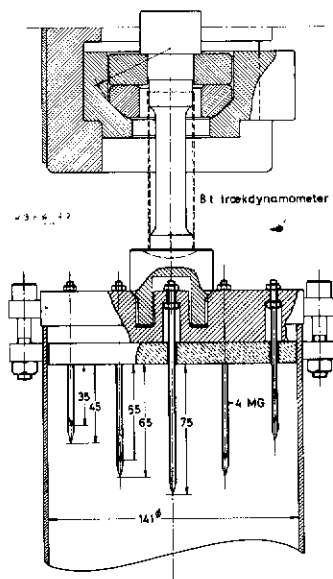
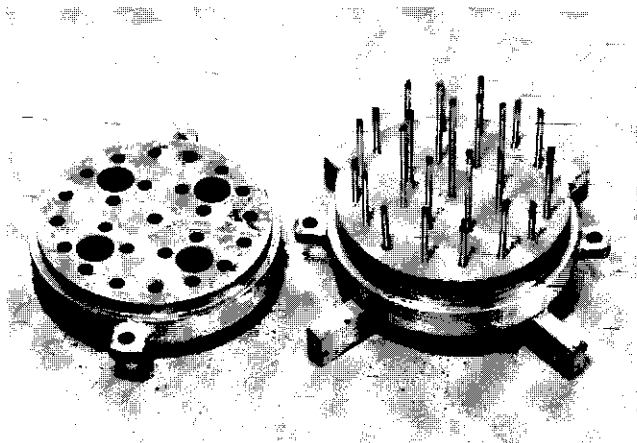


Fig. 5: Detalje af øverste trækfjeder

Figur 4 viser en tegning af det færdige trækprøvelegeme, mens Fig 5 i detaljer viser det øverste trækfjeder. (Figuren er lidt misvisende, idet støbeformen selvfølgelig på dette tidspunkt er fjernet).

Det primære er jo, at der er valgt en diameter (141 mm) så nær som muligt de 150 mm, der er gældende for de sædvanlige trykcyklindre, men som her kunne opnås ud fra en type eksisterende stålrør, der efter opfræsning kunne uddrejes til en cy-

linderform. Desuden tricket med at overføre trækraften fra de stive endebunde via 25 stk 4 mm gevindpinde, én i centrum, 8 i mellemkredsen og 16 i yderkredsen. Endebundens areal er opdelt i 25 lige store arealer, og hver gevindpind er placeret i sit areals tyngdepunkt. Der er (se Fig.5) lavet rigelig udboring fra indersiden og et godt stykke ud, hvor først så de enkelte tappe fastholdes af de to møtrikker. Tappene kan således bevæge sig i tværetningen, så modstand på denne led ikke skal starte brud. Af samme grund indlægges en blød træfiberplade mellem stålendebunden og betonen, så disse udboringer ikke udfyldes, samt for at undgå at en Poisson-sammentrækning ikke hindres af en sammenklæbning mellem beton og stål.



Figur 6: Stålendebunde til trækprøvelegeme

På Fig.6 er vist et foto af de to stålendebunde. Bundstykket (til højre) er monteret med forankringspinde og med træfiberplade klar til indstøbning. De fire huller i topstykket (til venstre) er såkaldte dødhoveder, hvor overskydende beton kan arbejde sig op, når topstykket, efter at formen er fyldt, vibreres ned i betonen. Det skal nævnes, at der indledningsvis

før de egentlige forsøgsrækker blev foretaget meget omfattende forforsøg med betonprøvelegemer, som både rundt på midten og rundt ude ved endebundene var rigeligt forsynet med strain-gauges for nøje at analysere, om det var lykkedes - som til-sigtet - at få et rent enakset træk uden nogen form for bøj-ning. Målingerne viste helt klart, at der ikke var signifi-kaant bøjning, hvis alt blev samlet korrekt, og prøvemaskinens kugleflader blev rensed og fedtet grundigt før hver serie.

### 3. Forsøgsresultater

Inden vi går over til at beskrive de forskellige forsøgsresul-tater, vises på Fig.7 (omstående side) princippet i de for-skellige forsøgspstillinger, der blev benyttet.

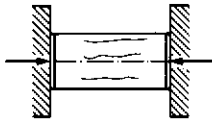
Forsøgene blev udført på den måde, at der samtidig med støb-ning af 3 trækprismer blev støbt 12 almindelige kontrolcylind-re 150×30 cm, som hærdeses sammen med disse. De 6 cylindre blev benyttet til spalteforsøg og de 6 til trykforsøg.

Der er gjort forsøg med standard Portlandcement (28 døgns hær-dning) og rapidcement (14 døgns hær-dning) og både med vand-lagring helt til forsøgstidspunkt og med kombineret lagring. Af Fig.8 (omstående side) fremgår resultater heraf, idet det enkelte kurvepunkt er bestemt som middel af tre trækforsøg (ordinat) og af seks trykforsøg (abscisse); desuden er en passende middelkurve indlagt. Det ses, at for samme lagrings-måde fås ingen forskel for de to cementsorter, hvorfor der i det følgende ikke skelnes mellem disse. Derimod er der natur-ligvis stor forskel på, om det er vandlagret eller kombineret lagret beton, der er anvendt, jf de tidligere nævnte indre spændinger fra udtørringssvindet. Denne sammenhæng er vist på Fig.9, idet der dog ligeledes er vist forskellen mellem enakset trækstyrke og spaltetrækstyrke ved samme lagring (kom-bineret lagring).

## FORSØGSPSTILLINGER

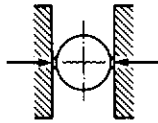
### Flakset tryk ( $\sigma^c$ )

Cylinder:  $\varnothing 150 \times 300$  mm, støbt og afbundet stående.  
 Plane enderflader  
 Mellemlæg: Blødt træfiberplade:  
 12 x  $\varnothing 150$  mm.  
 Forsøghastighed: 25-50 kp/cm<sup>2</sup> pr. min.



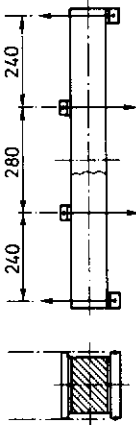
### Spalteforsøg ( $\sigma_{sp}^t$ )

Cylinder  $\varnothing 150 \times 300$  mm, støbt og afbundet stående.  
 Mellemlæg af hård fiberplade:  
 15 x 7,5 x 300 mm, tildannet efter cylinderoverfladen ( $r = 7/8$  mm).  
 Forsøghastighed: 4 - 6 kp/cm<sup>2</sup> pr. min.



### Røjningsforsøg ( $\sigma_{r}^t$ )

Prisme:  
 100 x 150 x 800 mm,  
 støbt og afbundet  
 således:



1. stående.

2. liggende som vist:



Forsøghastighed: ca. 10 kp/cm<sup>2</sup> pr. min.

### Lagringsmåder.

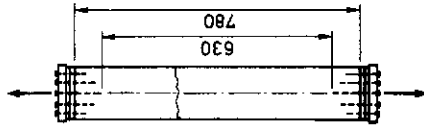
Vandlæsigt: 2 døgn i form, derefter i vand til umiddelbart for forsøgt.  
 Kombineret-lagring: 2 døgn i form, derefter i vand med påfølgende luftlagring (20°C, ca. 15% rf) således:  
 Rapidoement: 3 døgn i vand i 9 døgn i luft til prøve 14 døgn efter støbning.

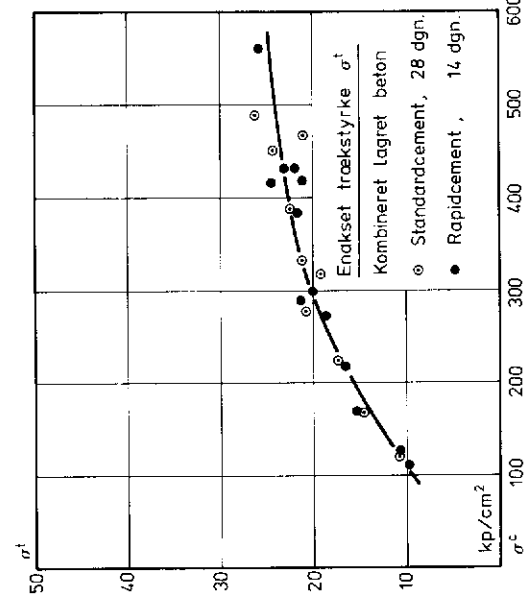
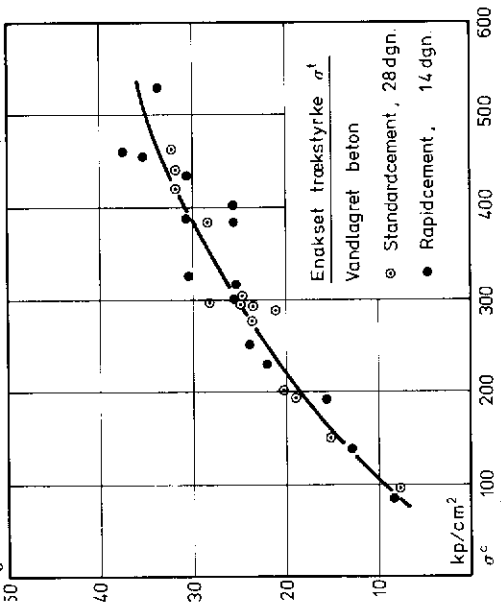
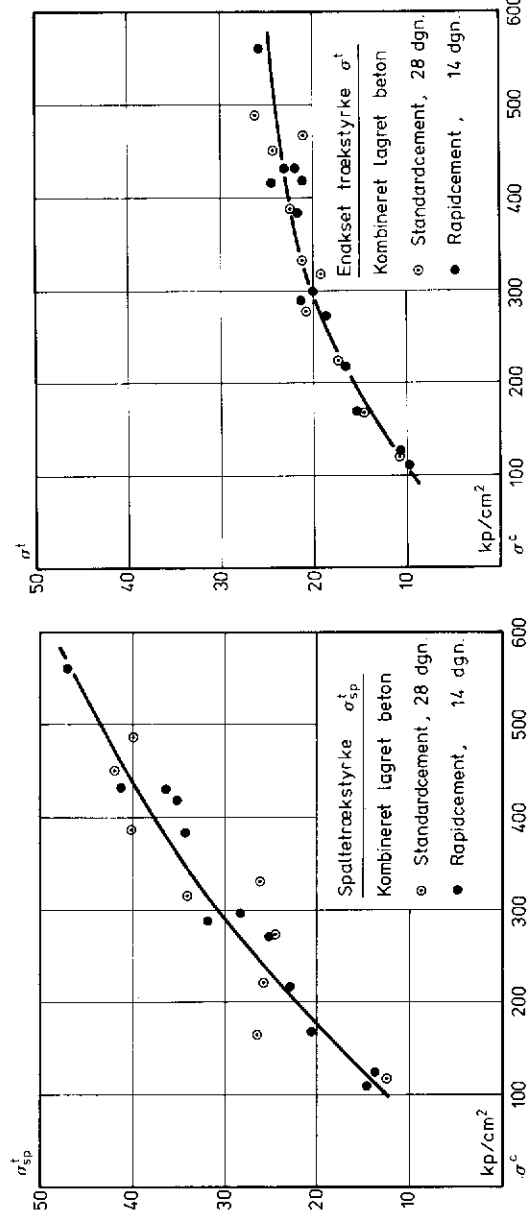
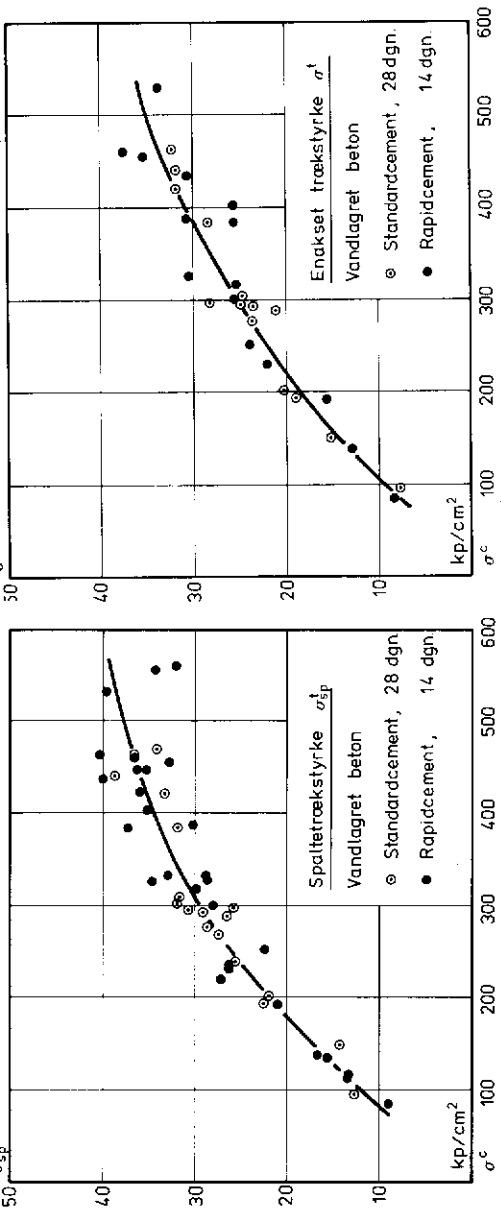
Standardement: 8 døgn i vand + 18 døgn i luft til prøve 28 døgn efter støbning.

Materialer: Dansk Portland-ement. Tilslag: Danske sø-materialer,  $d_{max} = 16$  mm.

### Flakset tryk ( $\sigma^c$ )

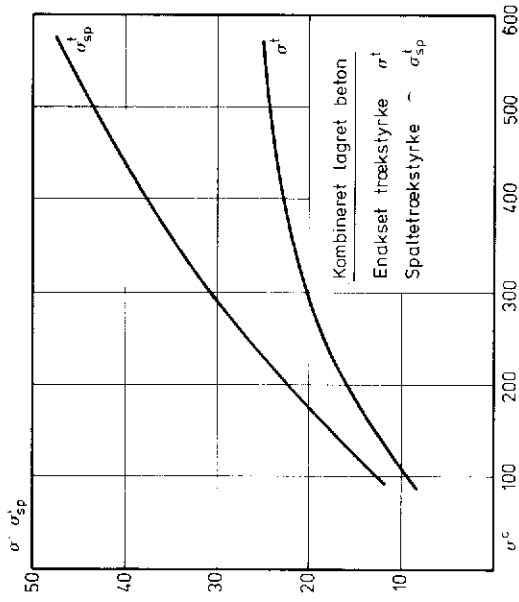
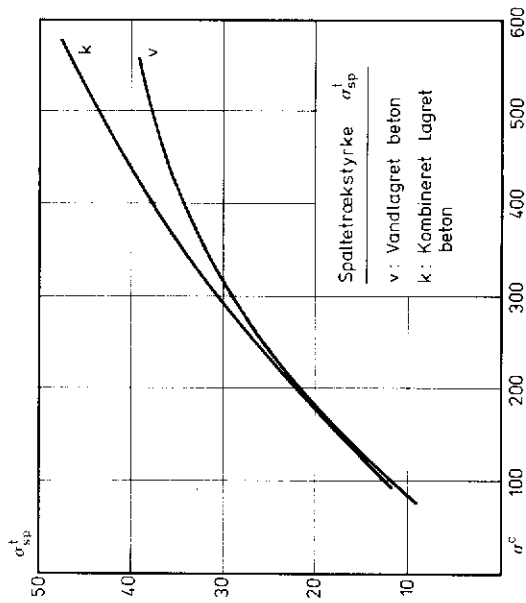
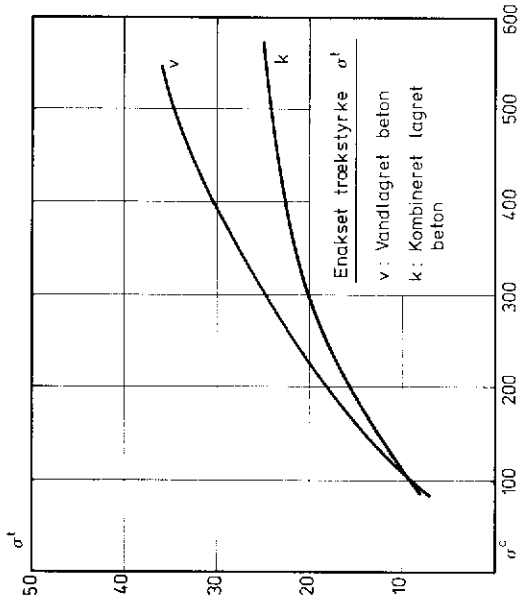
Cylinder:  $\varnothing 140 \times$  ca. 700 mm, støbt og afbundet stående.  
 Kraftoverføring: 25 stk. 4 MG ind-støbt fra hver ende bund.  
 Mellemlæg: Blødt træfiberplade:  
 12 x  $\varnothing 140$  mm  
 Forsøghastighed: 3-5 kp/cm<sup>2</sup> pr. min.





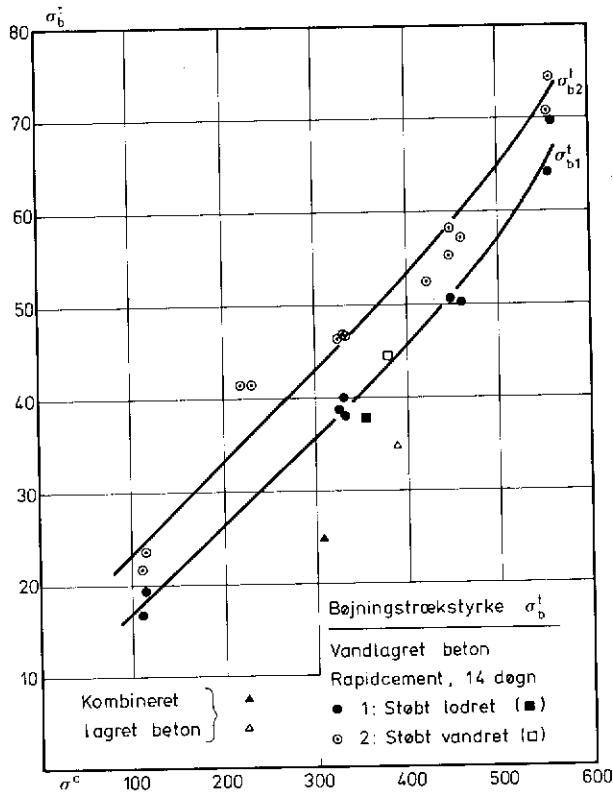
Figur 8:

Spaltetrækstyrke og enakset trækstyrke bestemt ved både vandlagret og kombineret lagret beton og ved anvendelse af standardciment og rapidciment afsat som funktion af trykstyrken.



Figur 9: Sammenligning mellem spaltetrækstyrke og enakset trækstyrke ved henholdsvis vandlagret og kombineret lagret beton, samt sammenligning mellem enakset- og spaltetrækstyrke ved en given lagring (kombineret lagring). Trækstyrken er afsat som funktion af trykstyrken.





Figur 10: Resultater af bøjningsforsøg.

$\sigma_{b2}^t$  gælder for prøvelegemer støbt vandret og

$\sigma_{b1}^t$  for samme støbt lodret.

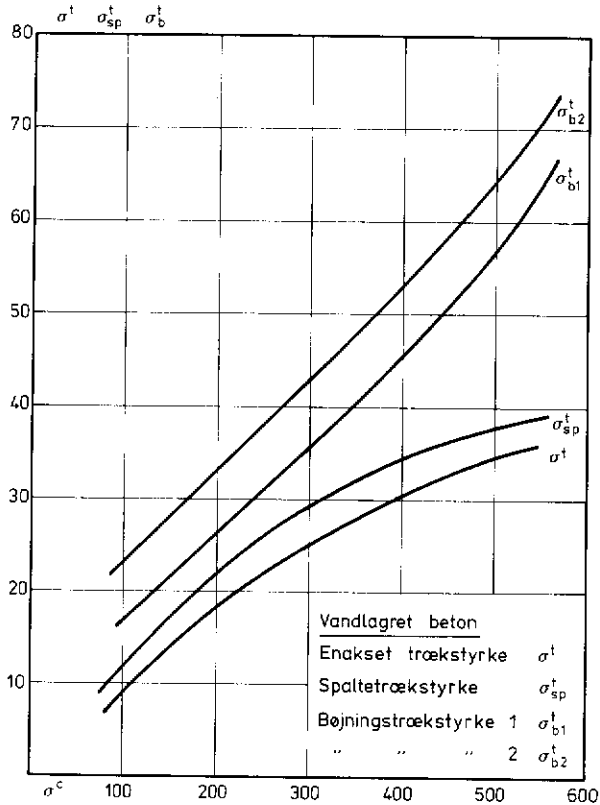
Angivet som funktion af trykstyrken.

Figur 10 viser resultaterne af bøjningsforsøgene, og det ses, at den lodret støbte prøve giver en noget ringere bøjningsstyrke, hvilket utvivlsomt skyldes det før omtalte kemiske svind, som medfører, at mørtelen i hulrummet mellem betonens større sten trækker sig lidt væk fra disse og således kan efterlade luft- eller vandfyldte små lommer og svage zoner, hvorfra bøjningsbruddet i så fald naturligvis vil starte.

Af sidstnævnte figurer ses tydeligt, at den rent enaksede trækstyrke falder en del, når betonen udtørres ved kombineret lagring og omvendt, at spaltstyrken stiger en smule ved samme udtørring, som ræsonneret tidligere. Ved kombineret lagring ses spaltstyrken at ligge væsentligt over den enaksede trækstyrke. Ved bøjningsforsøgene bemærkes, at kombineret lagring medfører et fald i styrken, samt at forskellen mellem prøver støbt lodret eller vandret ikke er nær så markant som for de tilsvarende vandlagrede prøver. Utvivlsomt igen et resultat af, at den kombinerede lagring i overfladen medfører dannelse af mikrorevner som naturligere angivere for start af endeligt brud.

Endelig er på Figur 11 vist sammenligning mellem enakset trækstyrke, spaltstyrke og bøjningsstyrke (henholdsvis støbt lodret (b1) og vandret (b2)) - dog kun for vandlagrede prøvelegemer.

Det ses af Figur 11, at spaltstyrken ved vandlagret beton altid ligger noget over den rent enaksede trækstyrke, samt at bøjningsstyrken hele vejen ligger betydeligt højere - ja så meget højere ude i den stærke ende, at kurven her får opad krum karakteristisk imod alle de øvrige nedad krumme. Forklaringen på denne opadkrumning kan sikkert fås ved betragtning af Figur 12.



Figur 11: Sammenligning mellem de forskellige trækstyrkebestemmelser afsat som funktion af trykstyrken

Af Figur 12 ses det ganske interessante, at for den svage beton er trakarbejdskurven praktisk taget retliniet; trykarbejdskurven derimod stærkt afvigende fra begyndelsestangenten (deviationsfaktoren er angivet på figuren ( $f_u$ )). For den stærke beton derimod er formen af de to kurver praktisk taget identisk, blot naturligvis i vidt forskellig målestok (trækkurverne er - som det ses - tegnet i betydelig større målestok end trykkurverne).

ABK-sag 1/62

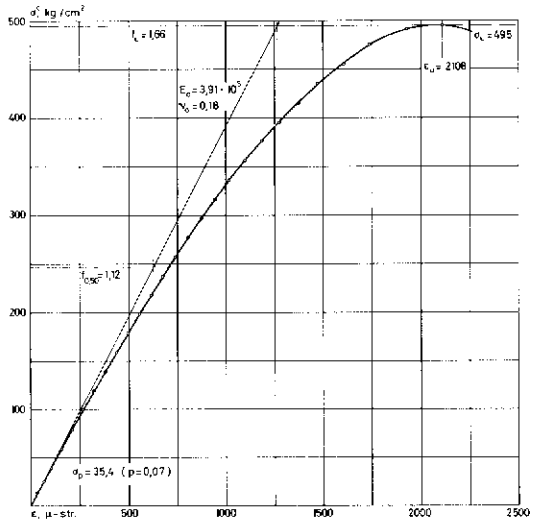
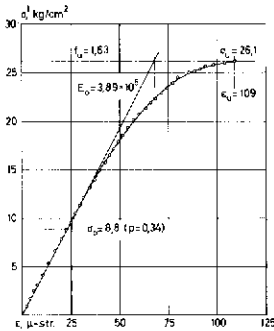
Træk- og trykarbejdskurver for beton

Cement: Standard

Lagring: 28 d komb (21 + 8v + 181)

Beton 2: c/v = 2,75

Forsøgshastighed:  $\Delta\epsilon / \Delta t = 12 \mu\text{-strain}/\text{min}$ .

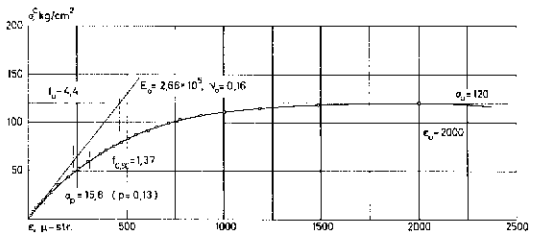
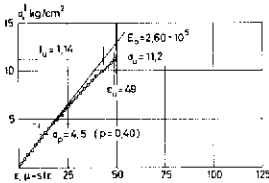


ABK - sag 1/62

Cement: Standard

Lagring: 28 d komb.

Beton 1: c/v = 0,75



Figur 12: Arbejdskurver for en svag og en stærk beton

Det er sikkert netop den stærkt krumme trækarbejdskurve i den stærke ende, som er ansvarlig for, at bøjnings-/trykstyrkediagrammerne krummer opad i højre side.

Lyngby 18.oktober 1977

Ole Hejgaard  
Ole Hejgaard

NY MODELL FÖR SPRICKORS UPPKOMST OCH UTVECKLING SAMT DESS  
TILLÄMPNING PÅ BETONG

Arne Hillerborg, Lunds Tekniska Högskola

När man utför ett dragprov på en jämntjock homogen stång får man till en början en jämnt fördelad töjning i stången. På en mätlängd  $l$  får man då samma förlängning  $\Delta l$  var man än mäter, se fig. 1 vid kraften  $P_1$ .

När maximilasten  $P_{\max}$  uppnåtts och lasten börjar sjunka vid ökande deformation uppträder ett brottområde i stången. Inom brottområdet sjunker kraften då förlängningen ökar. Den sjunkade kraften ger inom övriga delar av stången en minskning (återgång) av deformationen. Man får alltså olika kraftdeformationsdiagram för mätsträckor som innehåller brottområdet (A) och för sådana som inte innehåller brottområdet (B).

Brottområdet börjar utvecklas då töjningen i en punkt överskrider gränstöjningen  $\epsilon_g$ . Så länge töjningen är lägre än  $\epsilon_g$  beskrivs sambandet mellan påkänningen  $\sigma$  och töjningen  $\epsilon$  av ett  $\sigma$ - $\epsilon$ -diagram, vänstra delen av fig. 2. Förlängningen  $\Delta l$  är då för stången i fig. 1, mätsträckan B

$$\Delta l = \epsilon l \quad (1)$$

Inom brottområdet sker en tillskottsdeformation utöver den som anges av ekv. (1). Om vi betecknar denna tillskottsdeformation med  $w$  kan vi skriva förlängningen för en mätsträcka som innehåller ett brottområde, t ex A i fig. 1

$$\Delta l = \epsilon l + w \quad (2)$$

Mellan  $\sigma$  och  $w$  gäller ett samband i princip enligt den högra delen av fig. 2.

En fullständig beskrivning av spännings-deformationssambanden kan alltså ges med hjälp av ekv. (1) och (2) och diagrammen i fig. 2

under förutsättning att brottrådet ligger helt utanför eller helt inom mätsträckan. När spänningen sjunker bestäms därvid sambandet mellan  $\sigma$  och  $\epsilon$  av  $\sigma$ - $\epsilon$ -kurvans avlastningsdel.

Samma spännings-deformationssamband erhålles med en schematisk modell enligt fig. 3, där brottrådet återges som en fiktiv spricka med förmåga att överföra spänningar. Den fiktiva sprickans bredd  $w$  motsvarar brottrådets tilläggsdeformationer. Mellan  $\sigma$  och  $w$  gäller samband enligt fig. 2. Modellen leder till samma töjningssamband som ovan angetts för den verkliga provstaven.

Den visade modellen kan med fördel begagnas för studium av sprickutbredning, d v s som brottmekanisk modell, se fig. 4. I den verkliga sprickans förlängning utvecklas ett brottråde, som kan återges som en fiktiv spricka enligt modellen. I den fiktiva sprickans spets, där brottrådet just börjar utvecklas, är spänningen lika med draghållfastheten  $f_t$ . När den fiktiva sprickan nått en bredd  $w_1$  upphör den att föra över spänningar och övergår därmed till att vara en verklig spricka.

Inom brottrådet återgår energi för att vidga den fiktiva sprickan. Den totala energin för att åstadkomma en verklig spricka blir per ytenhet

$$\int_0^{w_1} \sigma dw$$

d v s ytan under  $\sigma$  -  $w$  - kurvan. Denna energimängd betecknas inom brottmekaniken med  $G_c$ , d v s

$$G_c = \int_0^{w_1} \sigma dw \quad (3)$$

Därigenom är modellen sammanknuten med vanliga brottmekaniska betraktelsesätt.

Om man känner draghållfastheten och antar en form på  $\sigma$  -  $w$  - kurvan ger ekv. (3)  $w_1$ , se fig. 5.

Den föreslagna modellen har följande fördelar framför traditionell brottmekanisk behandling.

1. En och samma modell beskriver alla typer av dragbrott, både ren dragning och sprickutbredning. Den kan därför förklara både sprickors uppkomst och deras utveckling.
2. Modellen förutsätter endast ändliga spänningar. Detta gör den dels mera realistisk än  $K_C$ -metoden, dels lättare att arbeta med vid numeriska beräkningar.
3. Modellen anger klart hur brottenergin  $G_C$  förbrukas, till skillnad mot många beräkningar enligt andra metoder. Därigenom är den mera realistisk och konsekvent.
4. Genom  $\sigma - w$  - kurvan kan man på ett nyanserat sätt ta hänsyn till brottegenskaperna hos olika material. Exempelvis kan  $\sigma - w$  - kurvan för en betong med svag fiberarmering tänkas se ut enligt fig. 6 med snabbt sjunkande spänning då betongen spricker men en viss kvarvarande spänning i fibrerna även vid stora deformationer.
5. Modellen är väl anpassad för beräkningar med finita element.
6. Modellen ger en åskådlig bild av brottförloppet.

#### Storleksinverkan

Om man har två likformiga balkar av material med likformiga  $\sigma - \epsilon$  - kurvor, fig. 7, kan man belasta dem så att spännings- och töjningsfördelningarna blir helt likformiga så länge inget brottområde börjat bildas.

Om full likformighet ifråga om spänningar och töjningar skall vara möjlig även efter det att ett brottområde bildats måste vissa villkor ställas på  $\sigma - w$  - kurvorna.

Som först villkor gäller att  $\sigma - w$  - kurvorna är likformiga.

Vi skall vidare befinna oss i motsvarande punkter på  $\sigma - \epsilon -$  - kurvorna och på  $\sigma - w$  - kurvorna för båda balkarna

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ f_t \end{pmatrix}_a = \begin{pmatrix} \sigma \\ f_t \end{pmatrix}_b \quad (4)$$

$$\begin{pmatrix} w \\ w_l \end{pmatrix}_a = \begin{pmatrix} w \\ w_l \end{pmatrix}_b$$

Ur den senare ekvationen erhålles

$$\frac{w_a}{w_b} = \frac{w_{la}}{w_{lb}} = \frac{(G_c / f_t)_a}{(G_c / f_t)_b} \quad (5)$$

Sprickbredderna  $w$  i motsvarande punkter är proportionella dels mot balkstorlekarna, dels mot töjningarna,  $d$  v s

$$\frac{w_a}{w_b} = \frac{(\epsilon L)_a}{(\epsilon L)_b} \quad (6)$$

Vidare gäller

$$\frac{\epsilon_a}{\epsilon_b} = \frac{(\sigma / E)_a}{(\sigma / E)_b} = \frac{(f_t / E)_a}{(f_t / E)_b}$$

varvid ekv. (4) utnyttjats. Sambandet gäller även om  $\sigma - \epsilon$  - kurvan är krökt.

Vi kan nu skriva om ekv. (6)

$$\frac{w_a}{w_b} = \frac{\left( \frac{L f_t}{E} \right)_a}{\left( \frac{L f_t}{E} \right)_b} \quad (7)$$

Kombination av ekv. (5) och (7) ger villkoret

$$\left( \frac{L f_t}{E G_c} \right)_a = \left( \frac{L f_t}{E G_c} \right)_b$$



eller

$$\left( \frac{L}{l_c} \right)_a = \left( \frac{L}{l_c} \right)_b \quad (8)$$

med

$$l_c = \frac{EG_c}{f_t^2} \quad (9)$$

Längden  $l_c$  är en materialegenskap, som kan kallas "karaktäristisk längd".

Vi kan nu sammanfatta villkoren för att två likformiga balkar skall kunna ha likformiga spännings- och töjningsfördelningar i brottstadiet.

1. Materialen i balkarna skall ha likformiga  $\sigma - \epsilon$  - kurvor.
2. Materialen i balkarna skall ha likformiga  $\sigma - w$  - kurvor.
3. Materialen i balkarna skall ha  $l_c$ -värden som är proportionella mot balkstorlekarna.

Den tredje punkten är omöjlig att uppfylla för två olika stora balkar av samma material. Detta betyder att två likformiga men olika stora balkar av samma betong inte kan uppträda identiskt lika i brottstadiet.

Ännorlunda uttryckt: Man kan inte på basis av försök med en liten balk via vanliga hållfasthetsformler beräkna brottlasten för en stor balk. Detta gäller främst då brottbeteendet är starkt beroende av utvecklingen av brottområden och sprickor, exempelvis skjuvbrott, vidhäftningsbrott och brott p g a stora deformationer.

Fig. 8 belyser dessa förhållanden för likformiga balkar av samma betong och med likformiga skjuvsprickor (verkliga + fiktiva) varvid den stora balken är dubbelt så stor som den lilla. Brottområdet (den fiktiva sprickan) får relativt sett större längd i den lilla balken, vars skjuvspricka därför hålls ihop bättre och tål relativt sett större last innan den blir instabil. Den stora

balken får alltså skjubbrott vid lägre skjivspänning än den lilla. Detta har tidigare inte beaktats i normer.

Ur samma resonemang kan man sluta sig till att lättballastbetong, som har lågt  $G_c$ -värde, är sämre ur skjivsypunkt än vanlig betong, och att fiberarmerad betong är bättre.

Som synes kan man dra väsentliga slutsatser om betongkonstruktioners brottbeteende redan ur enkla brottmekaniska resonemang.

Genom numeriska beräkningar med den angivna modellen är det möjligt att kvantifiera dessa slutsatser.

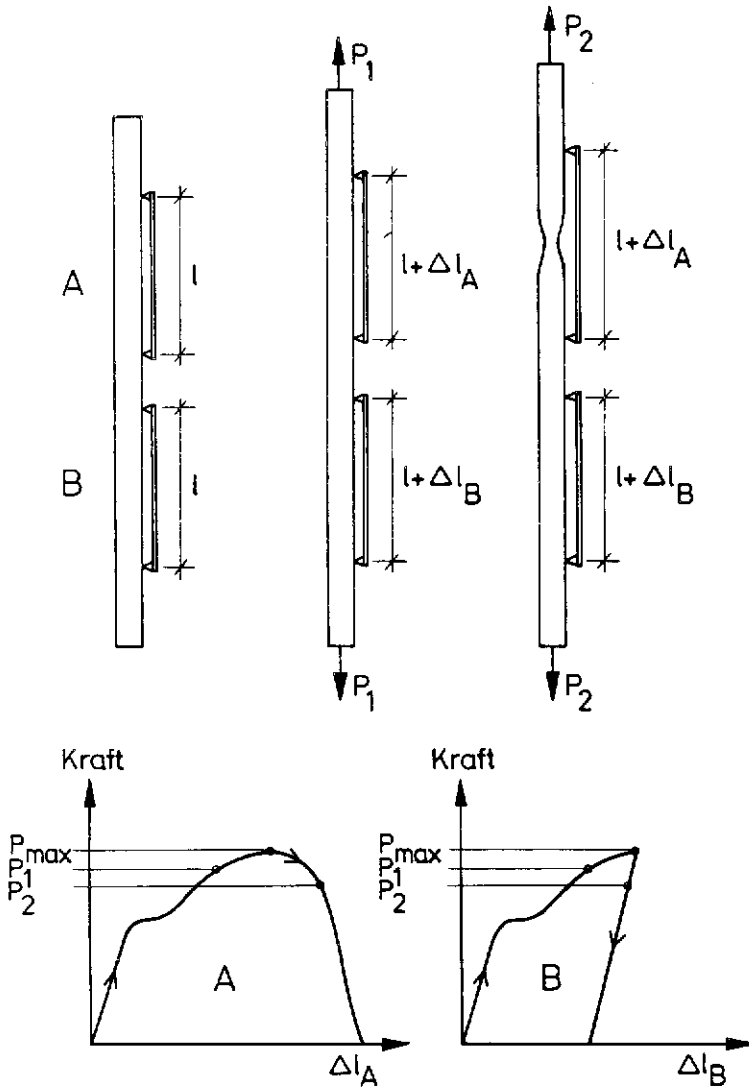


Fig. 1 Kraft-deformationskurvor vid dragprov. Kraften  $P_1$  avser ett läge innan  $P_{max}$  uppnåtts, medan  $P_2$  avser ett läge sedan  $P_{max}$  passerats och ett brottområde börjat utbildas inom mätsträckan A.

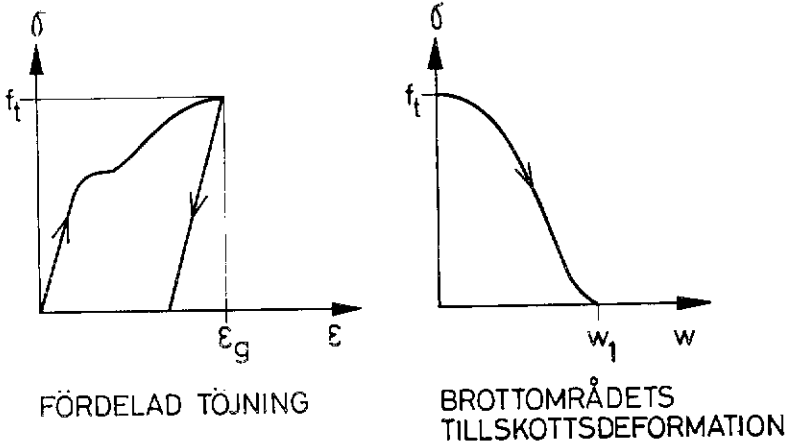


Fig. 2 Uppdelning av deformationen på  
 $\sigma - \epsilon$  - kurva och  $\sigma - w$  - kurva  
 $f_t$  = draghållfastheten  
 $\epsilon_g$  = gränstöjningen

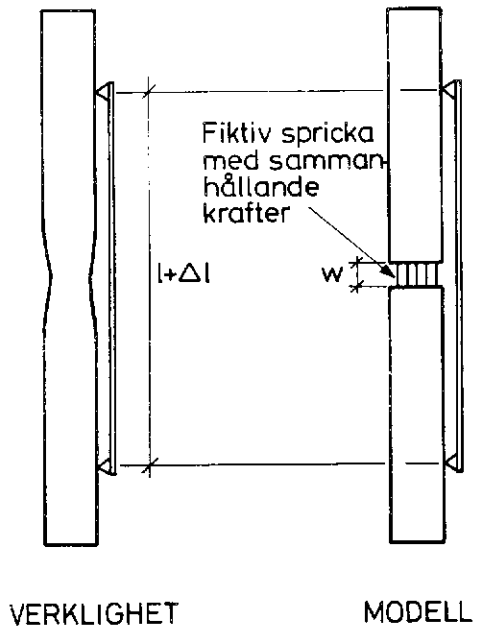


Fig. 3 Schematiserad modell av brottområde.

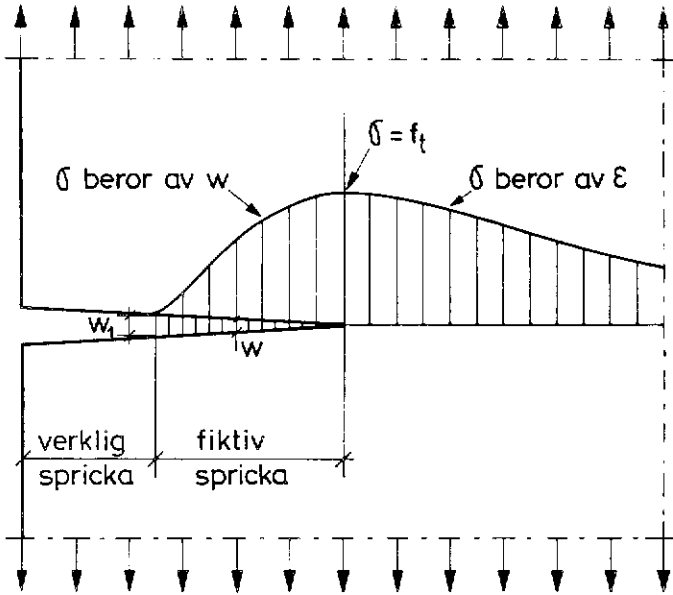


Fig. 4 Modellen enligt fig. 3-4 utnyttjad som brottmekanisk modell.

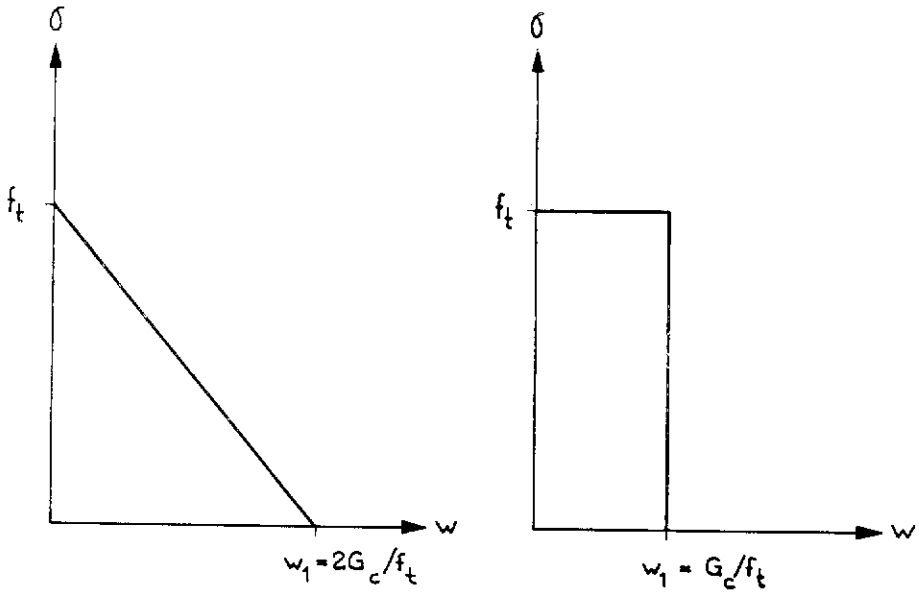


Fig. 5 Exempel på förenklade  $\sigma - w$  - kurvor.

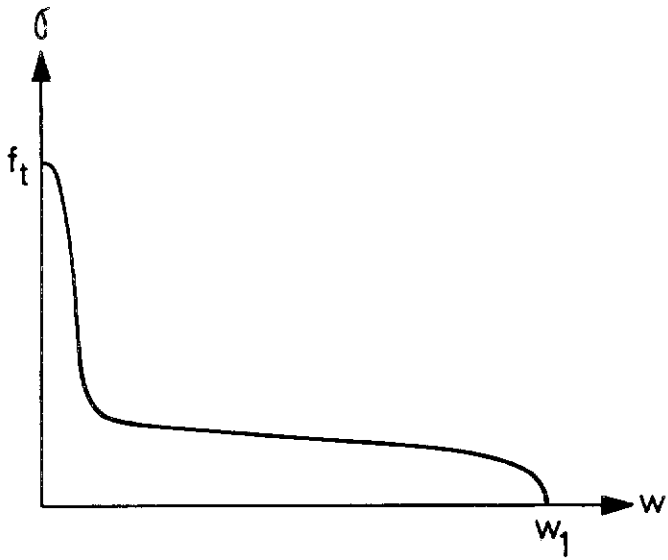
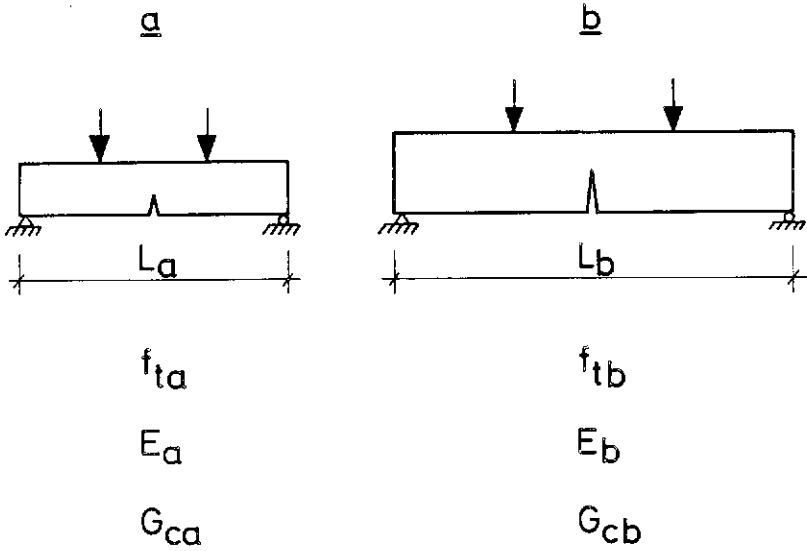


Fig. 6 Tänkbar  $\sigma$ -  $w$ - kurva för svagt fiberarmerad betong.





Alla mått proportionella

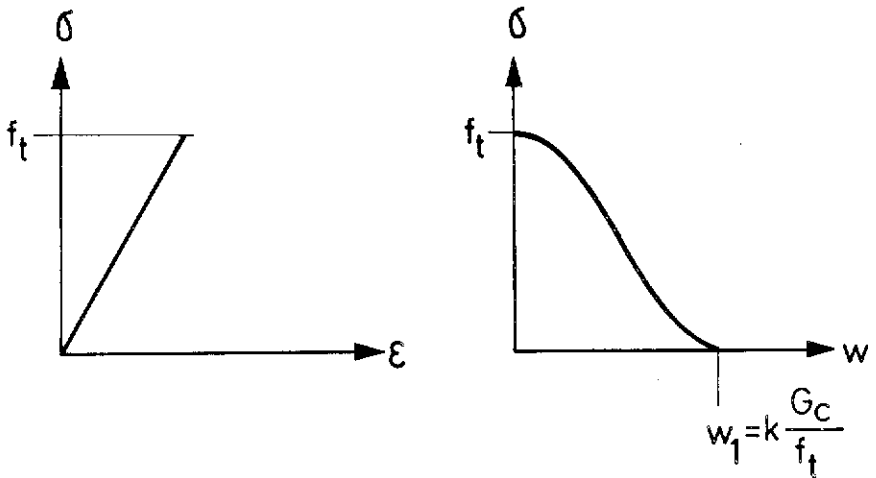


Fig. 7 Jämförelse mellan två likformiga balkar.

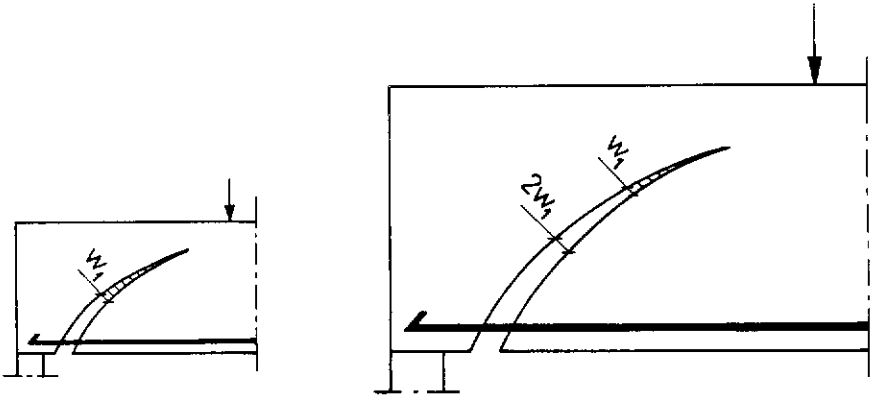


Fig. 8 Två likformiga betongbalkar med skjavsprickor. Balkarna är gjorda av samma material men den stora är dubbelt så stor som den lilla.

BROTTMEKANISKA  
BERÄKNINGAR OCH FÖRSÖK  
FÖR BETONG

FÖREDRAG VID  
BROTTMEKANISKT FORSKNINGSEMINARIUM  
AALBORG SEPTEMBER 1977

LUND I SEPTEMBER 1977

MATZ MODÉER

Innehållsförteckning

	Side
1. Inledning	59
2. Koppling struktur-egenskaper	59
3. Strukturen hos betong	60
4. Klassisk brottmekanik	61
5. Modell	62
6. Beräkningsmetod	63
7. Val av $\sigma(w)$	65
8. $G_c$ för betong	68
9. $K_{IC}$ för betong	75
10. Uppsprickning kring ballastkorn	77
11. Inre last	78
12. Spärrmekanismer	78
13. Betongmodell	79
14. Litteratur	80

## BROTTMEKANISKA BERÄKNINGAR OCH FÖRSÖK FÖR BETONG

Det här presenterade materialet ingår som en del av ett större projekt *BETONGENS MIKROBROTT*, vilket syftar till att för betong formulera relevanta kriterier för sprickors initiering och tillväxt fram till materialets totala kollaps.

### 1. Inledning

Trots att betong är ett av våra vanligaste byggnadsmaterial, finns det fortfarande stora luckor i vårt vetande om dess natur och egenskaper. Både analytiska och empiriska försök har gjorts för att beskriva volymförändringar, elastiska och ickeelastiska förändringar, sprickbildning och brott i termer som tar hänsyn till materialets struktur. Dessa betraktelser tar emellertid inte hänsyn till lokala spännings- eller töjningsvariationer, inte heller till kopplingarna mellan olika faser i den inre strukturen. En modell som gör detta, kan på ett kraftfullt sätt öka vår kunskap om fundamentala egenskaper som hållfasthet och beständighet hos materialet betong.

### 2. Koppling struktur-egenskaper

Det komplexa uppförandet hos ett material kan bara förstås och förutsägas genom studier av dess inre struktur. Dessa strukturella studier kan göras på olika nivåer allt ifrån den atomära upp till den kontinuerliga, homogena nivån.

På den minsta nivån är material inte homogena, isotropa eller kontinuerliga utan består av ett stort antal diskreta partiklar. Denna gruppstruktur kan i en större skala ersättas av ett homogent, isotropt och kon-

tinuerligt medium sammansatt av strukturella element med identiska egenskaper.

På den största nivån, den helt kontinuerliga, har material egenskaper som är medelvärden av de ingående elementens egenskaper.

Få material är uppbyggda av en enda typ av element utan är flerfasssystem eller kompositer. Egenskaperna hos sådana material bestäms inte alltid av de ingående fasernas egenskaper utan ofta av kopplingarna mellan de olika faserna. Vidare är variationer i det mekaniska uppförandet hos dessa material resultat av diskontinuiteter i den inre strukturen. Struktur känsliga egenskaper, som brottstyrka och beständighet, bestäms till stor del av lokala oregelbundenheter inom element eller mellan olika element i strukturen.

### 3. Strukturen hos betong

Betong är en tillverkad komposit vars beståndsdelar innan de härdat är ballast, cement och vatten. Efter härdningen uppstår olika strukturelement med mer eller mindre lika egenskaper. Genom att ta medelvärden av de olika elementens egenskaper, kan man tänka sig olika faser som kompositen är uppbyggd av. Varje sådan fas kan anses vara homogen, isotrop och kontinuerlig.

#### Nivå 1

Betong är ett enkomponentmaterial vars egenskaper är ett medelvärde av de ingående elementens.

#### Nivå 2

Betong är ett tvåkomponentmaterial vars faser är ballast > 4 mm i diameter och bruk.

### Nivå 3

Betong är ett trekomponentmaterial vars faser är ballast  $> 4$  mm, ballast  $< 4$  mm och cementpasta.

### Nivå 4

Att göra en finare uppdelning än vad nivå tre anger, verkar för betongen, som helhet inte meningsfull. Cementpastan kan emellertid fasuppdelas separat för studier av dess uppförande. Denna senare uppdelning för till viss del utanför ramen för det här presenterade materialet.

## 4. Klassisk brottmekanik

Griffith framlade 1921 en teori som försöker förklara varför material inte tål de påkänningar de borde göra med hänsyn till sin atomstruktur. Han antog att alla verkliga material innehåller ett otal små sprickliknande oregelbundenheter och att man vid spetsen av någon sådan spricka kan erhålla en lokal spänningskoncentration. Denna kan uppnå materialets atomära hållfasthet och sålunda orsaka brott i materialet redan för en mycket liten yttre påkänning.

Griffith menade alltså att brott hos ett material beror av de lokala förhållandena vid spetsen av någon sprickliknande oregelbundenhet inne i materialstrukturen. Detta är vad brottmekaniken behandlar.

Självfallet går det åt en viss energi för att skapa en ny ytenhet spricka. Denna energimängd är lika självfallet en materialegenskap och kallas efter Griffith för  $G$ . Man har också lagt till ett  $c$  som står för critical; energimängden kallas alltså  $G_c$ .

För betong på nivå 1 är  $G_c$  ett medelvärde av de ingående elementens  $G_c$ . På nivå 2 och 3 har varje fas och koppling mellan faser  $G_c$ -värden som i sin tur är medelvärden av de i de olika faserna och kopplingarna ingående elementens  $G_c$  osv.

Om man kunde bestämma  $G_c$ , brottenergin, för de olika faserna och deras kopplingar i en betong och sedan i en modell låta det gå åt just denna energi för att öppna en spricka en ytenhet i eller mellan respektive fas, skulle man på ett fysikaliskt riktigt sätt kunna förklara betongens uppsprickning och brott.

### 5. Modell

Modellen beskrivs i detalj i /1/. Huvudidén är att då en spricka öppnar sig spänningen  $\sigma$  inte omedelbart faller till noll vid sprickspetsen utan avtar med ökande sprickbredd  $w$ . Spänningsvariationen väljs så att

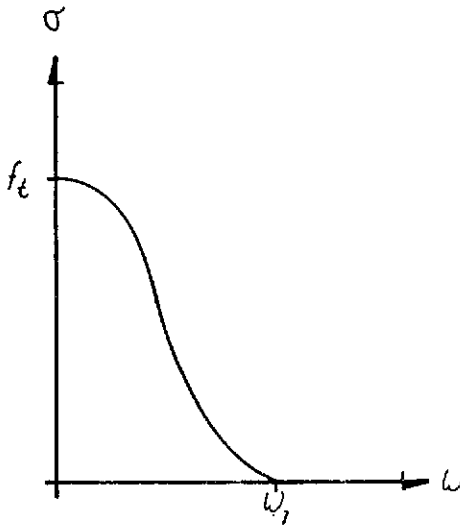


Fig 1. Variation av spänning  $\sigma$  med sprickbredden  $w$



$$\int_0^{w_1} \sigma(w) dw = G_c \dots\dots\dots(1)$$

där  $w_1$  är den sprickbredd där spänningen just fallit till noll och  $G_c$  är förbrukad energi per enhetsyta spricktillväxt.

Grafiskt kan ekvation (1) åskådliggöras med figur 1.  $G_c$  är alltså lika med ytan under funktionen  $\sigma(w)$ . I figuren menas med  $f_t$  draghållfastheten.

### 6. Seräkningsmetod

Vid en analytisk behandling av problemet möter man snart stora hinder. Lämpligare är då någon numerisk metod. En sådan är finita elementmetoden, med förkortat skrivsätt FEM.

I FEM låter man kroppen bestå av ett ändligt antal kontinuumselement med ändlig utsträckning. Under vissa villkor konvergerar den så erhållna lösningen mot kontinuumslösningen då antalet element ökar. Vid brottmekaniska beräkningar kan man med FEM också enkelt, rent geometriskt, efterlikna sprickor genom att koppla loss en del element från varandra. Exempel på en elementindelning som spruckit upp visas i figur 2.

Ett sätt att representera den sammanhängande kraften mellan ytorna på en nybildad spricka är att använda sig av särskilda sprickspetsselement med negativ elasticitetsmodul svarande mot figur 1. Den spruckna geometrin i figur 2 får då utseendet enligt figur 3, dvs sprickspetsen sluter sig på ett mjukt sätt och de stora spänningskoncentrationerna framför sprickspetsen försvinner.

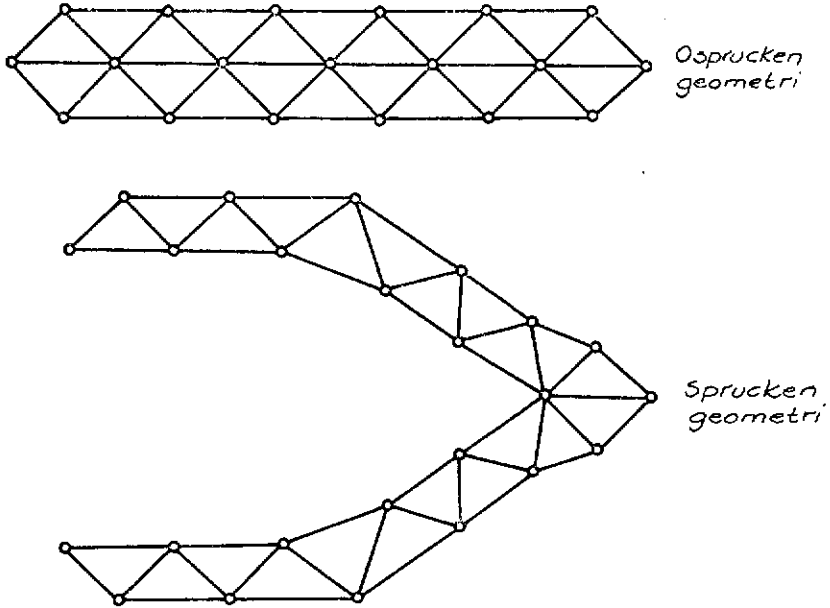


Fig 2. Sprickbeskrivning med FEM

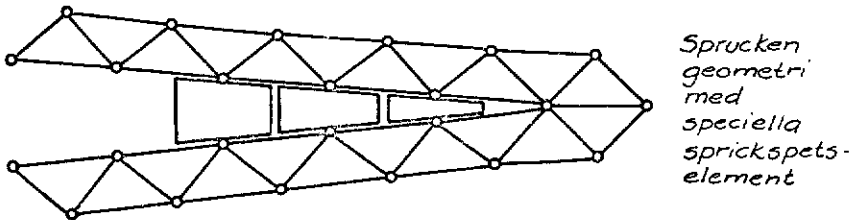


Fig 3. Sprickspets-element med negativ E-modul

### 7. Val av $\sigma(w)$

För spröda material är det rimligt att spänningen varierar med sprickbredden enligt någon av de tre varianterna i figur 4. I alla tre fallen är  $G_c$ , ytan under kurvan ifråga, lika stor.

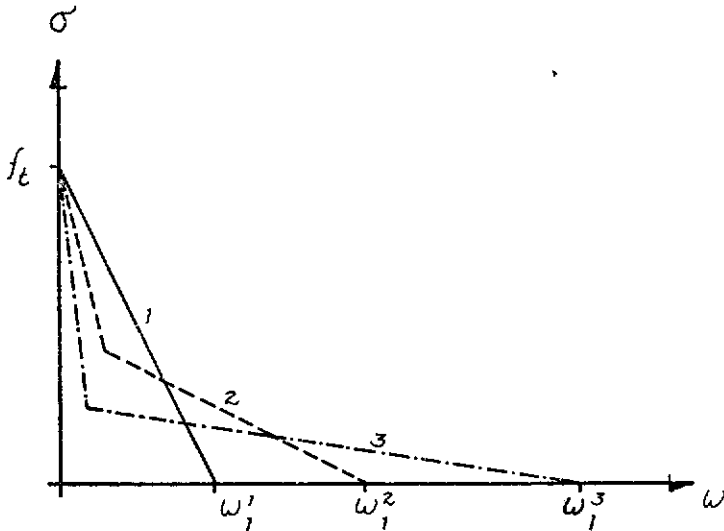


Fig 4. Olika val av  $\sigma(w)$

För en böjd balk enligt nedan fås  $F/F_0$  som funktion av

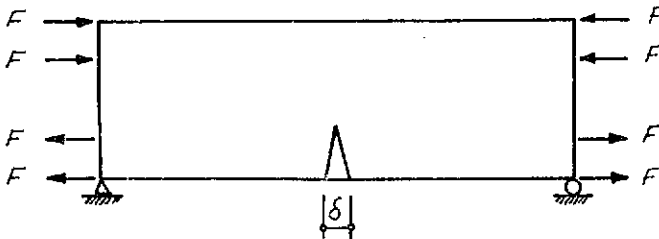


Fig 5. Belastningsfall 1

förlängningen  $\delta$  i brottområdet dividerad med  $w_1^1$ , för de tre olika  $\sigma(w)$  från figur-4 enligt figur 6.  $F_0$  är den kraft som ger brott i det helt linjärelastiska fallet, dvs då  $G_c = 0$ , och  $w_1^1$  är maximal deformation i ett sprickspetsselement för kurva 1 i figur 4.

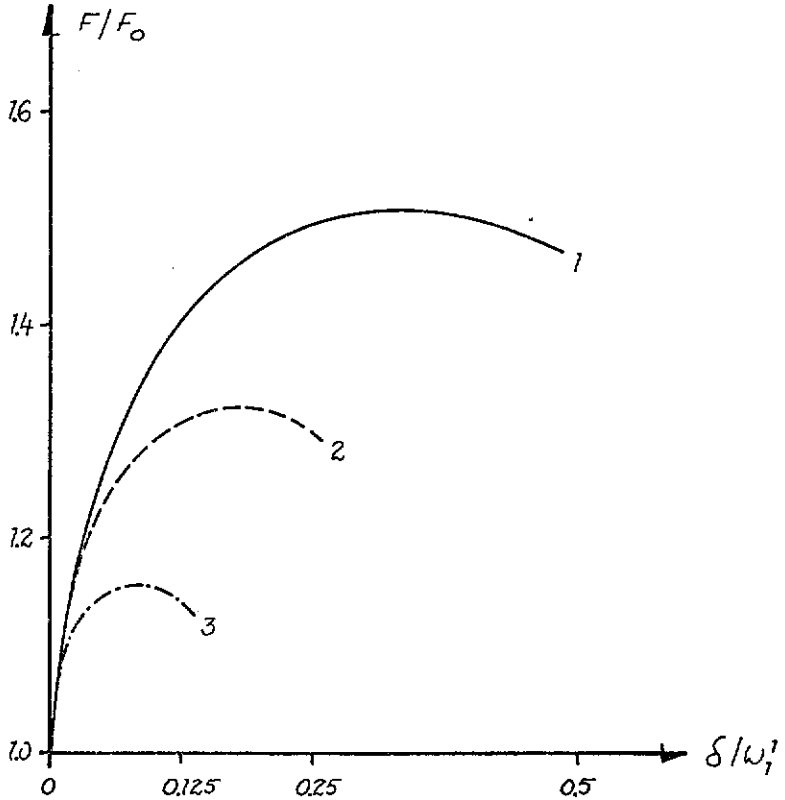


Fig 6.  $F/F_0$  som funktion av  $\delta/w_1^1$  för de tre olika  $\sigma(w)$  från figur 4

Av intresse är att  $(F/F_0)_{\max}$  uppnås långt innan  $\sigma(w)$  planar ut enligt figur 4. Det är sålunda initiallutningen på  $\sigma(w)$  som avgör den maximala momentupptagan-

de förmågan. Notabelt är också att kurva tre från figur 4 principiellt svarar mot en fiberarmerad betong. Fiberinblandningen borde alltså inte påverka hållfastheten så mycket utan endast brottförlängningen vilket ju stämmer.

Om vi sätter  $EG_c/f_c^2 = l_c$ , en materialkaraktäristisk längd, får vi för de tre fallen enligt figur 4  $(F/F_0)_{max}$  som funktion av balkhöjden  $h$  genom denna  $l_c$  enligt figur 7 nedan.

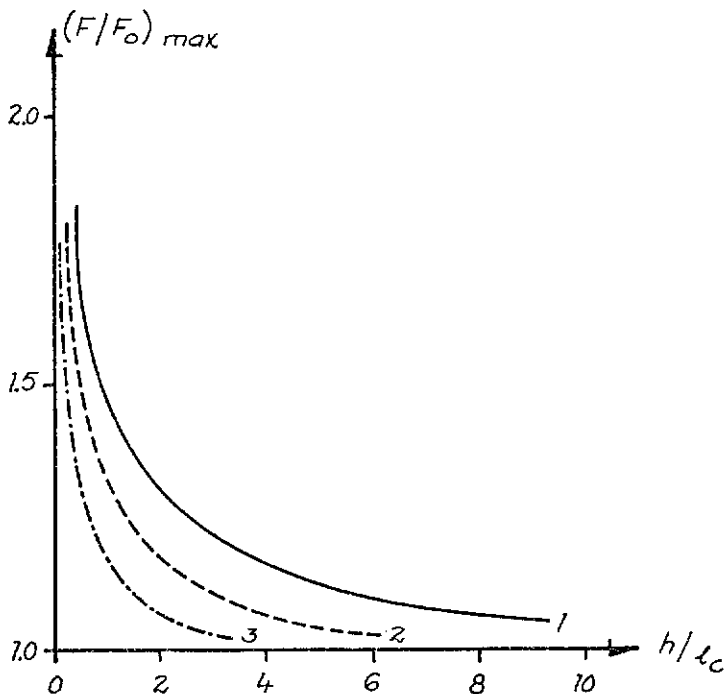


Fig 7.  $(F/F_0)_{max}$  som funktion av  $h/l_c$  för de tre olika  $\sigma(w)$  från figur 4 för belastningsfall 1 enligt figur 5

För betong har kurva 1 i figur 4 styrkts genom drygt 1200 försök utförda av 11 olika forskare, se /1/.

För pasta har också kurva 1 visat sig ge mycket god överensstämmelse med försök enligt /2/. Detta framgår också under "8.  $G_c$  för betong" i detta föredrag.

Att kurva 1 borde ge mycket god överensstämmelse både för betong, bruk och pasta framgår också av arbetskurvorna enligt figur 8. Kurvorna är hämtade ur /3/.

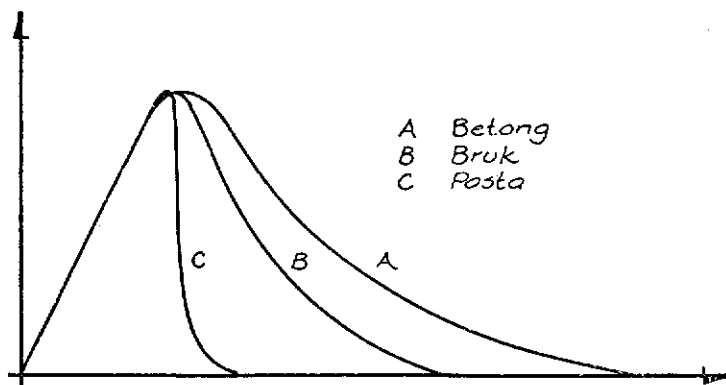


Fig 8. Arbetskurvor för dragen betong, bruk och pasta

### 8. $G_c$ för betong

$G_c$ , förbrukad energi per enhetsyta spricktillväxt, har i nästan alla arbeten uteslutande beräknats via den linjärelastiska kritiska spänningsintensitetsfaktorn  $K_{IC}$ . Värdet på  $K_{IC}$  fås från ett trepunkts böjprov med en förtillverkad spricka enligt figur 9.

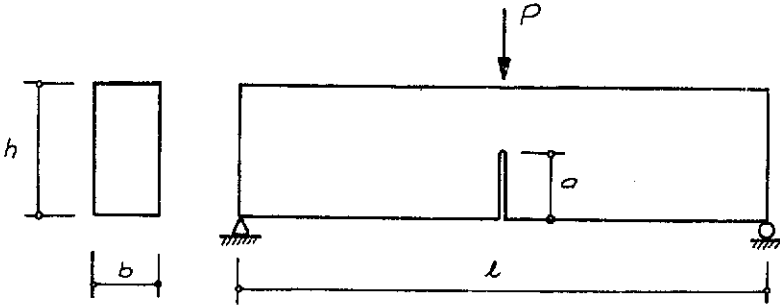


Fig 9. Trepunkts böjprov med förtillverkad spricka

Spänningsintensitetsfaktorn  $K_I$  kan beräknas via ekvation 2.

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F(a/h) \quad \dots\dots\dots(2)$$

där  $\sigma$  är den vanliga Navierska böjspänningen i balkens underkant utan hänsyn till den förtillverkade sprickan,  $a$  den förtillverkade sprickans längd och  $F(a/h)$  en formfaktor som kan erhållas på olika sätt. Oftast anges den som:

$$F(a/h) = \sum c_i (a/h)^i \quad (i \text{ går från } 0 \text{ till } 4) \dots(3)$$

Det kritiska värdet,  $K_{IC}$  eller brottsegheten, fås då  $P$  är maximal. Ur detta värde på brottsegheten kan sedan  $G_c$  beräknas ur ekvation (4).

$$G_c = K_{IC}^2 / E \quad \dots\dots\dots(4)$$

Olika författare har angivit helt olika värden på  $G_c$  framtagna på detta sätt. Anledningen står att finna i att betong uppför sig allt mindre linjärelastiskt ju mindre dimension provkropparna har. Eftersom man

använt sig av olika stora provkroppar, har man också fått olika värden på den linjärelastiska faktorn  $K_{IC}$  beräknad enligt (2) och följaktligen också på  $G_c$ .

Problematiken har uppmärksammats av bland andra Higgins och Bailey /2/. Dessa fann att brottsegheten för en cementpasta skenbarligen varierade med balkhöjden enligt figur 10.

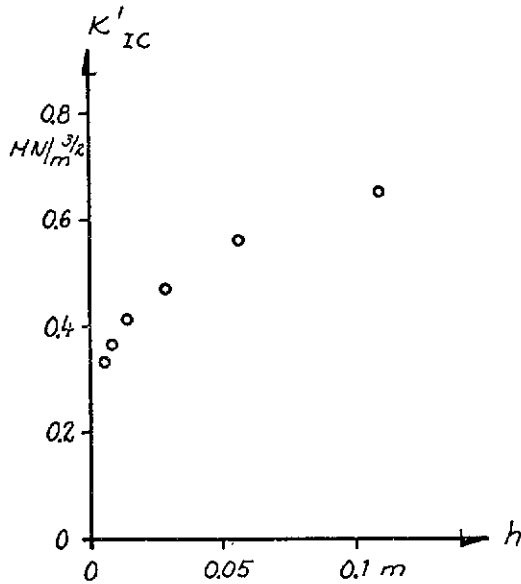


Fig 10. Skenbar brottseghet för cementpasta som funktion av balkhöjden enligt /2/

Med vår modell kan man visa att förhållandet mellan verklig brottseghet  $K_{IC}$ , en materialspecifik storhet, och skenbar brottseghet  $K'_{IC}$  beräknad via ekvation (2), beror på faktorn  $h/l_c$  enligt figur 11.



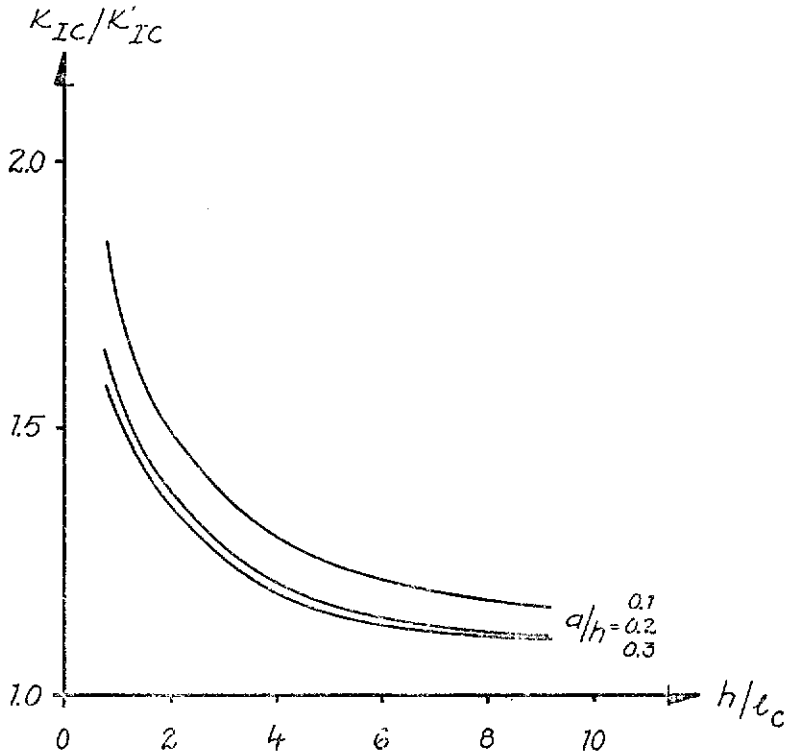


Fig. 11.  $K_{IC}/K'_{IC}$  som funktion av  $h/l_c$

Med de av Higgins och Bailey angivna värdena  $K_{IC} = 0.8 \text{ MN/m}^{3/2}$  och  $f_t = 5 \text{ MN/m}^2$  fås via figur 11 sambandet mellan skenbar brottseghet och balkhöjd enligt figur 12. I figuren är värdena enligt figur 10 också inlagda.

För en betong är ett normalvärde på  $l_c$  300 mm, vilket ger balkhöjder upp mot 1 till 1.5 m för att bringa ner felet i  $K_{IC}$  till en rimlig nivå. Trepunkts böjprov är alltså mindre lämpliga för bestämning av  $G_c$  via  $K_{IC}$  för pasta, bruk och betong.

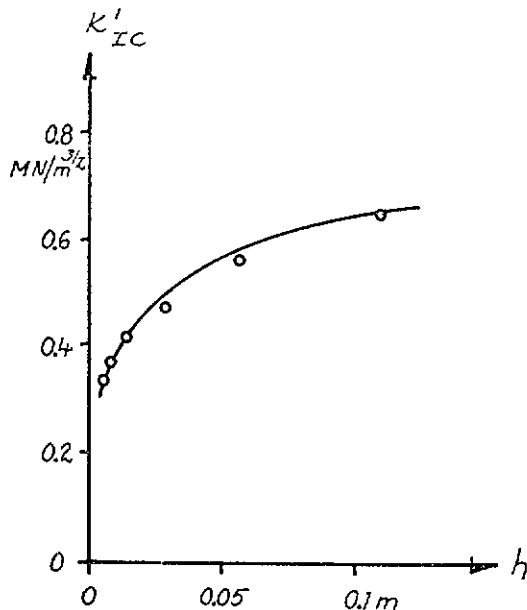


Fig 12. Teoretisk kurva enligt figur 10 samt testresultat från /2/ för skenbar brottseghet för pasta

Ett bättre sätt att bestämma  $G_c$  vore följdriktigt ett direkt sätt. Enligt Cooper /4/ kan detta göras genom att bestämma ytan under last-nedböjningskurvan i en provningsmaskin med konstant deformationshastighet och sedan dividera denna med brottytan hos provkroppen. Förutsättningen är emellertid att man erhåller stabil spricktillväxt genom provkroppen. Detta kan erhållas för ett visst längdintervall på provkroppen enligt principfiguren 13. Provkroppen är som tidigare av utseende enligt figur 9. Av denna framgår också att provkropp och provningsmaskin måste ha styvheter som passar varandra.

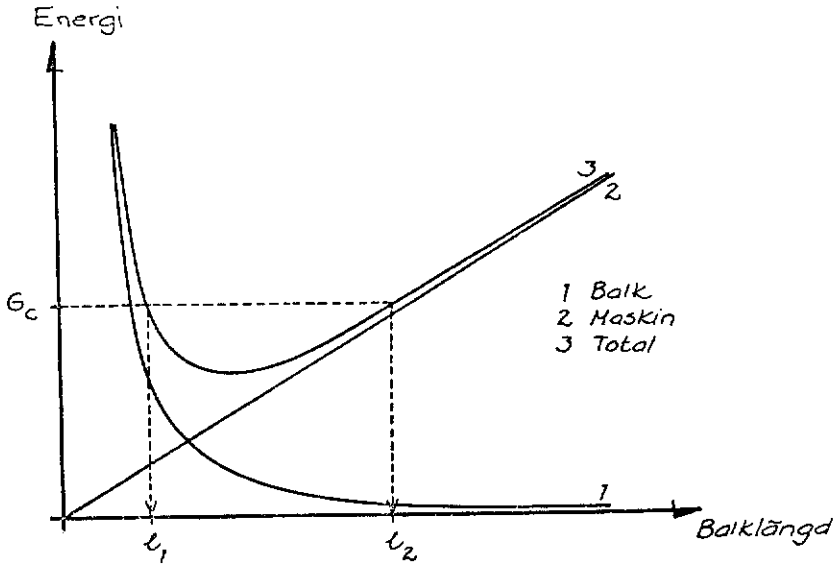


Fig 13. Variation av lagrad energi per enhet brottyta som funktion av balklängden. Kurva 1 avser elastiskt lagrad energi i balken, kurva 2 i provningsmaskinen och kurva 3 den totala energin.

Som framgår av figur 13 erhåller man stabil spricktillväxt över tvärsnittet om  $l_1 < l < l_2$ . Linjärelastiskt kan detta längdintervall fås enligt /5/ och /6/. Huvudlinjerna för dessa beräkningar är som följer.

För belastningsfiguren 9 kommer spänningsintensitetsfaktorn  $K_I$  enligt ekvation (2) att bero av lasten  $P$ , provkroppens utseende och den förtillverkade spricklängden  $a$ . När lasten ökar kommer  $K_I$  att öka mot  $K_{IC}$ , brottsegheten. När detta sker kan sprickan utbreda sig och beroende på om  $K_I$  ökar eller minskar med spricklängden  $a$ , kommer sprickan att växa på ett instabilt eller stabilt sätt, se figur 14..

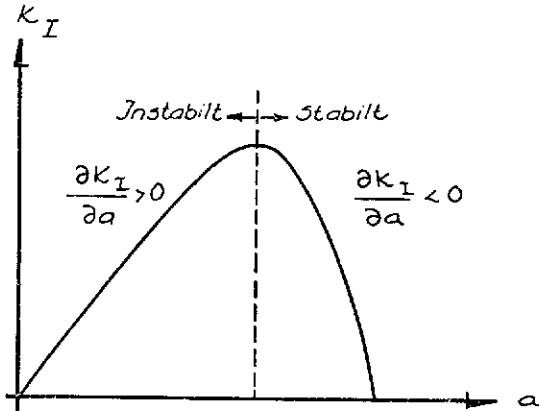


Fig 14. Linjärelastiskt stabilitetskriterium

Genom att sätta upp uttryck för  $K_I$  enligt ekvation (2) och derivera detta med avseende på den förtillverkade spricklängden  $a$  fås sålunda villkoren för stabilitet. Dessa villkor på provkropp och provningsmaskin sammanfattas i figur 15. Denna figur gäller för  $v = 0.2$  och i termen  $Eb/k$  avser  $k$  maskinstyvheten.

Exempelvis kan man ur figur 15 avläsa att  $Eb/k = 5.0$  ger  $l/h = 2$  och  $8$  dvs  $l_1 = 2h$  och  $l_2 = 8h$  om  $a/h = 0.5$ .

Notabelt är att för betong erhåller man stabil spricktillväxt även då man enligt figur 15 absolut inte skulle få det, för bruk stämmer det bättre men inte bra, för pasta däremot stämmer figur 15 hyfsat. Detta indikerar att brottsegheten för betong består av en linjärelastisk del härrörande från pastan samt spärrmekanismer härrörande från ballasten.

Som ett observandum bör också anmärkas att stabilitet enligt figur 13 kräver stabil spricktillväxt bara inom

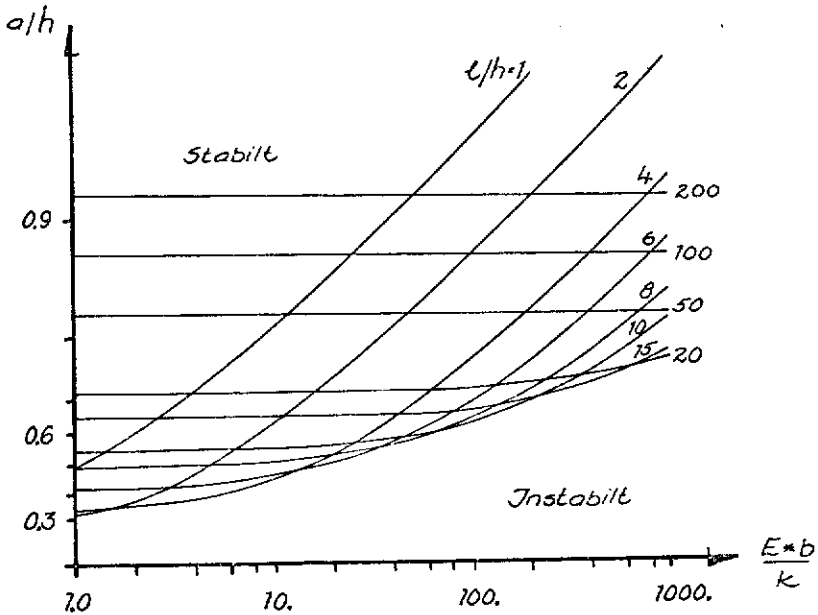


Fig 15. Linjärelastiskt stabilitetskriterium för provkropp enligt figur 9

någon del av tvärsnittet medan däremot stabilitet enligt figur 14 och 15 kräver stabil spricktillväxt över hela tvärsnittet. I alla mätningar av  $G_c$  enligt den direkta metoden måste man givetvis ha stabil spricktillväxt över hela tvärsnittet.

### 9. $K_{IC}$ för betong

Man kan se betong som en bruksrymd med ballastkroppar större än 4 mm i diameter. Bruksrymden kan i sin tur ses som en pastarymd med ballastkroppar mindre än 4 mm i diameter.

För betongen som helhet är  $K_{IC}$  av storleksordningen  $1.5 \text{ MN/m}^{3/2}$ , för bruket i denna betong är  $K_{IC}$  av storleksordningen  $1.0 \text{ MN/m}^{3/2}$  och för pastan i detta bruk av storleksordningen  $0.5 \text{ MN/m}^{3/2}$ .

Intressanta resultat för betong har också indirekt erhållits i /7/. I denna visas att brottsegheten för gasbetong varierar kraftigt med densiteten. Intressant att notera är den signifikanta minskning av brottsegheten som en ökad luftinblandning ger, också att minskningen praktiskt taget är rätlinjig.

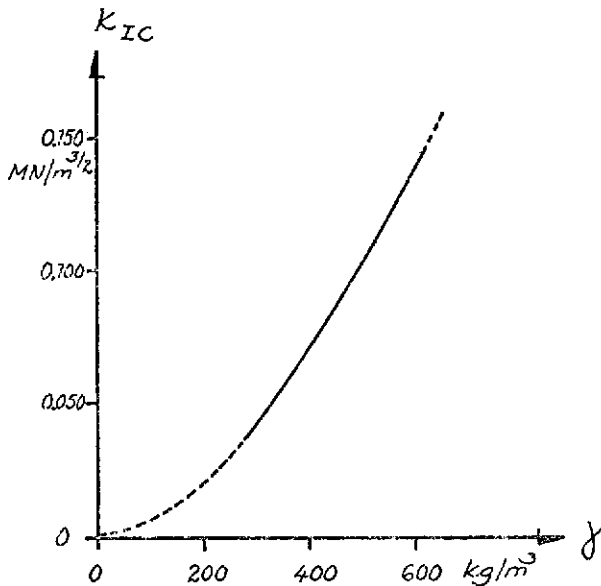


Fig 16. Brottsegheten för gasbetong som funktion av densiteten

Om man helt fräckt extrapolerar denna kurva upp till en densitet av  $1900 \text{ kg/m}^3$ , dvs samma densitet som ett

pastarikt bruk skulle ha, ger detta en brottseghet av  $0.90 \text{ MN/m}^{3/2}$ . Eftersom gasbetongen just är ett pastarikt bruk, indikerar detta att en ökande andel luftporer i en betong sänker brottsegheten i motsvarande proportion.

#### 10. Uppsprickning kring ballastkorn

Hur uppsprickningen kring ballastkorn av olika utseende sker, kan kontrolleras med beräkningar och försök enligt figur 17. För att kunna jämföra beräkningar och försök, behövs data som  $E$ ,  $f_t$  och  $G_c$  för pasta och bruk samt  $f_t$  och  $G_c$  för fasgränserna ballast-pasta och ballast-bruk.

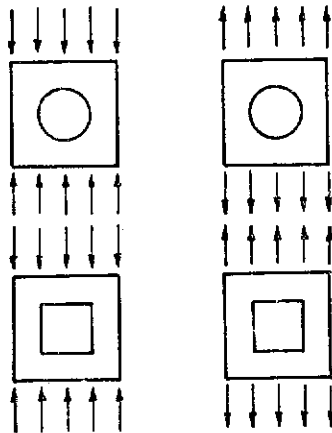


Fig 17. Strukturer för kontroll av uppsprickningsförloppet kring ballastkorn

### 11. Inre last

Inhomogeniteter och sprickanvisningar finns runt ballastkorn bland annat på grund av olika krympning hos ballast och pasta. Hur en schematisk krympning påverkar strukturerna i figur 17 är därför av stort intresse.

### 12. Spärrmekanismer

Som tidigare skisserats kan betongens brottseghet tänkas sammansatt av pastans brottseghet + olika spärrmekanismer som ballast och luftporer ger upphov till.

Dessa spärrmekanismer kan fungera som att när en spricka i pastan kommer fram till ett ballastkorn eller en luftpor, kan den delas upp i flera sprickor, gå runt eller igenom hindret. En spricka som löper mellan två ballastkorn, två luftporer eller ett ballastkorn och en luftpor, kan också påverkas genom de svaghetszoner som övergångarna pasta-ballast eller pasta-luft utgör.

Spärrmekanismernas inverkan kan studeras med strukturer enligt figur 18.

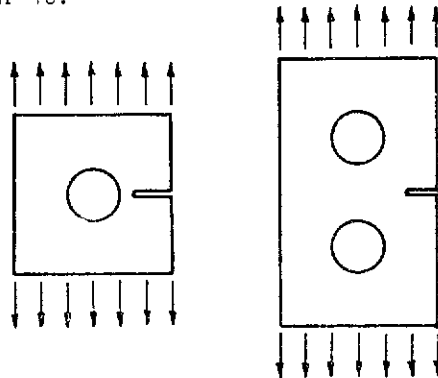


Fig 18. Strukturer för beräkning av spärrmekanismers inverkan på brottsegheten



### 13. Betongmodell

Vid Corneiluniversitetet, Ithaca N.Y., har omfattande experimentella och analytiska försök liknande våra skett med en förenklad tvåfasmodell som grund.

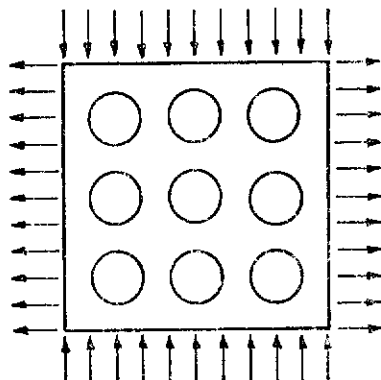


Fig 19. Betongmodell hämtad ur /8/

Man har emellertid erhållit dålig överensstämmelse mellan experiment och beräkningar, detta antagligen beroende på att man negligerat betongens brottseghet. Intressant vore att räkna på samma struktur och med samma laster men nu också med hänsyn till de ingående komponenternas brottsegheter via vår modell.

Strukturen utsättes för en och tvåaxiella spänningstillstånd och brottenvelopen bestämes och kan jämföras med den experimentella man tagit fram vid Cornell.

14. Litteratur

1. Hillerborg, A      Analysis of crack formation and  
    Modéer, M          crack growth in concrete by means  
    Petersson, P-E      of fracture mechanics and finite  
                         elements.  
                         Cement and Concrete Research,  
                         vol 6, sid 773-782, 1976.
  
2. Higgins, D D      Fracture measurements on cement  
    Bailey, J E          paste.  
                         Journal of Materials Science,  
                         nr 11, sid 1995, 1976.
  
3. Moavenzadeh, F    Fracture of concrete.  
    Kuguel, R            Journal of Materials, vol 4, nr 3,  
                         sid 497-519, sept, 1969.
  
4. Cooper, G A      Optimization of the three-point  
                         bend test for fracture energy  
                         measurement.  
                         Journal of Materials Science, nr  
                         12, sid 277-269, 1977.
  
5. Broberg, K B      On stable crack growth.  
                         Journal of the Mechanics and  
                         Physics of Solids, vol 23, sid  
                         215-237, 1975.
  
6. Bergkvist, H      Stability criteria for a cracked  
                         specimen.  
                         CERAC report nr 403:2, Schweiz,  
                         1976.

7. Gustafsson, P J    Brottmekaniska studier; lättbetong och fiberarmerad betong. Examensarbete vid avd för Byggnadsmateriallära, Tekniska Högskolan i Lund, 1977.
8. Carino, N J        The behavior of a model of plain concrete subject to compression-tension and tension-tension biaxial stresses.  
Report 357, Cornell University, Ithaca, New York, 1974.



BETON SOM PLASTISK MATERIALE

lic.techn. Bjarne Chr. Jensen  
Ingeniørfirmaet Axel Nielsen A/S  
Langelinie 5  
5230 Odense M  
Danmark

<u>Indhold</u>	Side
1. Indledning.	85
2. Brudbetingelse.	85
3. Plasticitetsteori.	87
4. Trykforsøget.	90
5. Forskydning i jernbetonbjælke.	91
6. Koncentreret belastning.	93
7. Afslutning.	95
8. Litteratur.	96

## 1. Indledning

I dette bidrag til forskningsseminariet vil beton blive betragtet makroskopisk. Der anvendes en såkaldt fænomenologisk brudteori, dvs. den beskriver fænomenerne ved brud og ikke årsagerne hertil.

Brudteorien kombineret med teorien for stift plastiske materialer har vist sig på en række områder at give særdeles fine resultater. Især for armeret beton er man nået frem til bæreevneformler, der stemmer godt med forsøgsresultater, og som udmærker sig ved at være simple og samtidig give en god forståelse for mekanismerne ved brud.

## 2. Brudbetingelse

Som brudbetingelse anvendes den såkaldte Coulombs modificerede brudhypotese. Brudhypotesen fremsattes af C.A. Coulomb i 1973, [1]. Han havde bemærket at brud i stenprismer under enakset tryk og brud i jord bag støttemure, når de giver efter for trykket, forløber langs visse flader. Disse flader kaldes glideflader og brud af denne type kaldes glidningsbrud. Coulomb antog at der i glidefladen skulle overvindes en indre kohæsion og en indre friktion. Kohæsionen antoges konstant og friktionen antoges proportional med normaltrykket på glidefladen. Udtrykt i spændinger kan hypotesen skrives som den velkendte

$$|\tau| = c - \mu \sigma = c - \sigma \tan \varphi \quad (1)$$

hvor

$\tau$  = forskydningsspændingen langs glidefladen

$c$  = kohæsionen

$\mu$  = friktionskoefficienten

$\sigma$  = normalspændingen vinkelret på glidefladen (positiv som træk)

$\varphi$  = friktionsvinklen

Brudhypotesen (1) kan også udtrykkes ved hjælp af hovedspændingerne:

$$\frac{1}{2} \sigma_1 (1 + \sin \varphi) - \frac{1}{2} \sigma_3 (1 - \sin \varphi) - c \cos \varphi = 0 \quad (2)$$

for  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ . Ændres hovedspændingernes indbyrdes størrelse ændres (2) tilsvarende.

Indføres trykstyrken som den spændingskombination  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (0, 0, -\sigma_c)$ , der netop giver brud findes af (2)

$$\sigma_c = \frac{2c \cos \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad (3)$$

hvorefter brudhypotesen kan skrives

$$k \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_c \quad (4)$$

hvor

$$k = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \tan^2 \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \quad (5)$$

Brudhypotesen anvendes normalt med held som brudbetingelse for granulære materialer, f.eks. for sand. Et specialtilfælde med  $\varphi = 0$  (Trescas brudhypotese) anvendes til tider som brudbetingelse for stål. Normalt anvendes dog deviationsenergihypotesen (von Mises brudhypotese) for stål.

For beton viser (4) sig at være udmærket som brudbetingelse ved trykpåvirkninger, men ved træk må den suppleres med den såkaldte adskillelsesbrudhypotese. Adskillelsesbrud antages at indtræde når største trækspænding bliver lig med adskillelsesmodstanden. For beton er denne lig med trækstyrken, medens den for stål er ca. 2 x trækstyrken.

Den samlede brudbetingelse for beton er derfor

$$k \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_c \quad (6a)$$

$$\sigma_1 = \sigma_t \quad (6b)$$

(6) kaldes Coulombs modificerede brudhypotese, idet (6a) er modificeret med (6b), hvori  $\sigma_t$  er den enaksede trækstyrke.  $\sigma_t$  er bestemt som den spændingskombination  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (\sigma_t, 0, 0)$  der netop giver brud.



Det bemærkes at der skal bestemmes 3 parametre for at fastlægge (6).

Allerede i 1928 foreslog Richart m.fl. [2], [3] at anvende (6a) som brudbetingelse for beton, idet man ved forsøg konstaterede at  $k$  var konstant. Der har siden været udfoldet store bestræbelser for at bestemme  $k$  og for at forbedre brudbetingelsen yderligere. Det er nemlig en kendt sag at den mellemste hovedspænding har betydning for brudbetingelsen, hvilket (6) ikke tager hensyn til. Betydningen er dog forholdsvis beskednen, se f.eks. [4], og (6) er i hvert fald ved tryk en sikker brudbetingelse. I fig. 1 er resultaterne fra [2] og [3] afbildet sammen med (6a), hvor  $k = 4$ , svarende til  $\phi = 37^\circ$ . Af figuren ses at den valgte værdi for  $k$  er udmærket.

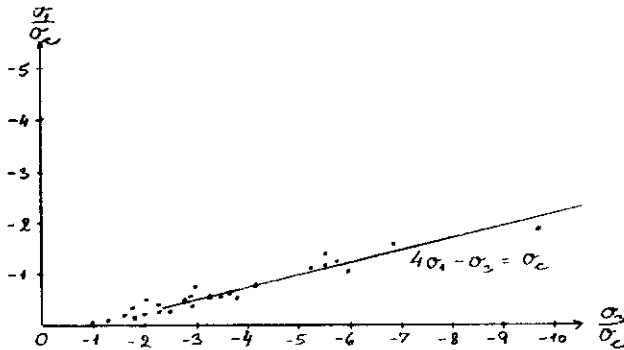


fig. 1. Forsøgsresultater fra [2] og [3].

### 3. Plasticitetsteori

Her skal kun gennemgås hovedtrækkene i plasticitetsteorien og dens anvendelse i forbindelse med beton. For en grundigere indføring og en udledning af de heri præsenterede formler henvises til [5].

Beregninger efter plasticitetsteorien følger principielt en af to mulige fremgangsmåder. Eventuelt anvendes begge fremgangsmåder.

Den ene metode er den såkaldte nedreværdimetode. For en given belastning findes statistisk tilladelige spændingsfordelinger. Hvis de er sikre, dvs. spændingerne intet sted er større end de, der efter brudbetingelsen giver brud, er belastningen mindre end eller lig med legemets brudlast.

Efter nedreværdimetoden gælder det altså om at finde så stor en værdi for belastningen som mulig.

Den anden metode er den såkaldte øvre værdimetode. Arbejdslovingen anvendes på vilkårligt geometrisk mulige brudfigurer. De belastninger, der findes på denne måde, er alle større end eller lig med legemets brudlast.

Efter øvre værdimetoden gælder det altså om at finde så små værdier for belastningen som mulig.

Ved at anvende begge metoder kan man finde et interval, hvori man ved at brudlasten skal ligge. Hvis øvre værdi og nedreværdi er sammenfaldende, er det brudlasten, man har fundet. Det skal understreges at selv om man har fundet sammenfaldne øvre- og nedreværdier, er det ikke givet, at man har fundet den eneste mulige spændingsfordeling eller brudfigur, der giver de fundne værdier.

Nedreværdimetoderne har i mange år været anvendt ved beregning af jernbeton. Man har indlagt trykzoner i betonen og anbragt armering til at optage træk, således at man har fået lukkede krafttrekanter. Metoden har, f.eks. været brugt ved jernbetonkonsoller. Muligvis fordi man ikke har været klar over, at man udnyttede plasticitetsteoriens nedreværdimetode, har man ikke været tilstrækkelig opmærksom på de begrænsninger metoden har. Disse begrænsninger illustreres lettest af øvre værditeknikken.

Metoderne skitseret her baserer sig på antagelsen om stift-plastiske materialer. I virkeligheden forekommer der også elastiske tøjninger, men i den stift-plastiske model betragtes kun den slutttilstand, hvor flydespændingen er opnået i så store områder, at geometrisk mulige brudfigurer kan udvikles.

For at kunne anvende metoden må de elastiske tøjninger eller områder med elastiske tøjninger være små i forhold til de plastiske. Der er ikke tilfældet for beton. Vi ved også at ved fortsat deformation efter at maximalspændingen er opnået falder spændingen.

Man må derfor slutte, at bidraget til det indre arbejde i arbejds-ligningen i en del tilfælde vil være mindre, end hvis materialet virkelig havde været stift-plastisk. Det kan udtrykkes ved at den styrke i betonen vi kan udnytte ved brud er mindre end den forventede ud fra brudbetingelsen. For det forhold kan vi indføre en effektivitetskoefficient  $\nu \leq 1$ , som parametrene i brudbetingelsen (6) skal multipliceres med for at give den brudbetingelse, vi kan anvende.

Den indførte  $\nu$  vil variere fra problem til problem, afhængig bl.a. af spændingsfordelingernes kompleksitet. Yderligere må en afhængighed af betonstyrken forventes. Ved store betonstyrker vil  $\nu$  være mindre end ved små, idet beton generelt bliver mindre plastisk jo stærkere det er.

Selv med indførelse af  $\nu$ , der tager hensyn til den begrænsede plasticitet, viser plasticitetsteorien at give gode og brugbare resultater.

Det er altså væsentligt at konstatere, at man ikke kan forvente fuld udnyttelse af betonen. Netop dette forhold ser man ofte bort fra, når man anvender nedreværdibetragtninger som f.eks. simple træk-trykzoner. Som før nævnt har man ved jernbetonkonsoller anvendt denne fremgangsmåde, uden at reducere betonstyrken. De hidtidige erfaringer med plasticitetsteorien tyder på at man ved sådanne konsoller kun bør regne med 50-70 % af betonstyrken.

Fra [5] skal her blot yderligere fremdrages nogle formler for det indre arbejde pr. længdeenhed i en brudlinie i beton.

Fig. 2 viser en brudlinie i beton, hvis højre side bevæger sig  $V$  i forhold til venstre.  $V$  danner vinklen  $\alpha$  med brudlinien

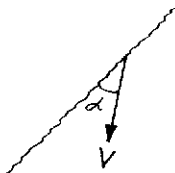


Fig. 2. Brudlinie med deformationsvektor.

Under forudsætning af plan spændingstilstand kan det indre arbejde pr. længdeenhed af brudlinien findes til

$$W = \frac{1}{2} \sigma_c V (1 - \sin \alpha) \quad \alpha \leq \phi \quad (7a)$$

$$W = \frac{1}{2} \sigma_c V (1 - \sin \alpha) + \frac{\sin \alpha - \sin \phi}{1 - \sin \phi} \sigma_c V \quad \alpha \geq \phi \quad (7b)$$

Som bemærket foran skal de indgående styrkeparametre  $\sigma_c$  og  $\sigma_t$  reduceres til de effektive styrker.

Vedrørende generelle formler for det indre arbejde og for det indre arbejde pr. længdeenhed af brudlinier ved plan deformationstilstand henvises til [5].

#### 4. Trykforsøget

Ved et trykforsøg søger man så godt det er muligt at tilvejebringe et enakset tryk i prøvecylinderen. Som det fremgår af (4), findes af nedreværdimetoden det selvfølgeligelige resultat, at  $\sigma_3 = -\sigma_c$ .

For at finde en øvre værdi betragtes brudfiguren på fig. 3.

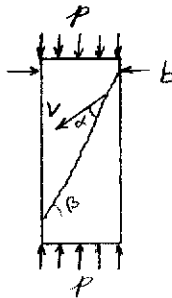


Fig. 3. Brudfigur ved trykforsøget.

Øverste del bevæger sig  $V$  i forhold til den nederste. Arbejds-ligningen anvendes og for det ydre arbejde findes

$$A_y = pbV \sin(\beta - \alpha) \quad (8)$$

Det indre arbejde findes af (7a) til

$$W_i = \frac{1}{2} \sigma_c V (1 - \sin \alpha) \frac{b}{\cos \beta} \quad (9)$$

Ved at sætte disse udtryk lig med hinanden findes øvreverdien

$$p = \frac{1}{2} \sigma_c \frac{1 - \sin \alpha}{\cos \beta \sin(\beta - \alpha)} \quad (10)$$

For at finde den mindste øvreverdi skal (10) minimeres m.h.t.  $\alpha$  og  $\beta$ .

Man finder  $p = \sigma_c$  for  $\beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}$ .

Både med nedre- og øvreverdimetoden er bæreevnen fundet til at være lig med trykstyrken. Resultatet er naturligvis indlysende, men eksemplet er medtaget for at vise, hvor let øvreverdimetoden er at anvende.

### 5. Forskydning i jernbetonbjælke

Vi ser på forskydning i et bjælkefag påvirket af en konstant forskydningskraft. I forskydningsfaget antages følgende spændingsfordeling:

Træk- og trykzonen betragtes som stringere, dvs. uden udstrækning i højden, se fig. 4.

Betonen imellem stringerne har en enakset trykspænding  $\sigma_b$  dannede vinklen  $\epsilon$  med vandret.

Bøjlerne regnes jævnt fordelt med en ækvivalent lodret spænding på

$$\sigma_y = \frac{A_a \sigma_a}{c b} \quad (11)$$

hvor  $A_a$  er bøjlearealet, der krydser det vandrette betonareal  $c \cdot b$ .  $c$  er bøjleafstanden og  $b$  er bjælkebredden.

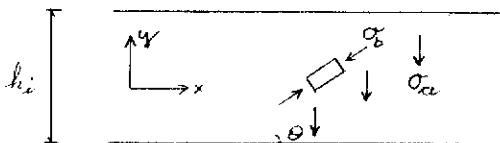


Fig. 4. Spændinger i forskydningsfag.

De samlede spændinger i det viste koordinatsystem er

$$\sigma_x = -\sigma_b \cos^2 \theta \quad (12)$$

$$\sigma_y = -\sigma_b \sin^2 \theta + \frac{A_a \sigma_a}{c b} \quad (13)$$

$$\tau = \tau_{xy} = \sigma_b \sin \theta \cos \theta \quad (14)$$

For at ligevægtsligningerne skal være opfyldt, skal  $\sigma_y = 0$ , idet der ikke er ydre kræfter vinkelret på bjælken. Af (13) findes

$$\sigma_b \sin^2 \theta = \frac{A_a \sigma_a}{c b} \quad (15)$$

Af (14) finder man

$$\sigma_b = \tau (\tan \theta + \cot \theta) \quad (16)$$

Brud antages at indtræde når armeringsspændingen  $\sigma_a$  bliver lig med flydespændingen  $\sigma_f$ , og når betonspændingen  $\sigma_b$  bliver lig med den ækvivalente betonstyrke  $\sigma_c^*$ , der jfr. afsnit 3 er mindre end betontrykstyrken  $\sigma_c$ .

Af (15) og (16) findes

$$\frac{\bar{L}}{\sigma_c^*} = \sqrt{\frac{A_a \alpha_f}{\rho b \sigma_c^*} \left(1 - \frac{A_a \alpha_f}{\rho b \sigma_c^*}\right)} \quad (17)$$

En øvre værdi for bæreevnen findes af brudfiguren på fig. 5.

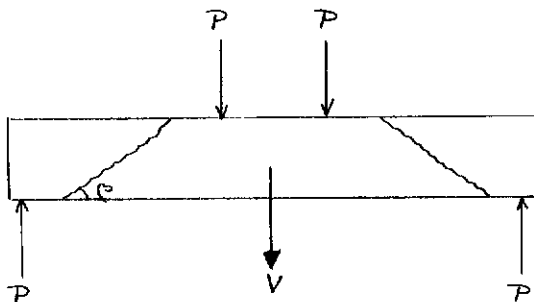


Fig. 5. Brudfigur.

Arbejds ligningen opskrives til

$$PV = \frac{A_a \alpha_f}{\rho b} b h \cos \phi \left( V + \frac{1}{2} \sigma_c^* b (1 - \cos \phi) \frac{h}{\sin \phi} V \right) \quad (18)$$

Første led på højre side er armeringens bidrag, medens sidste led er betonens bidrag fundet af (7), ( $\sigma_t = 0$ ). Ved minimering med hensyn til  $\phi$  findes at bæreevnen netop bliver (17), idet  $\tau = \frac{P}{bh}$

Vi har altså igen sammenfaldende øvre og nedreværdier, dvs. den korrekte bæreevne er fundet. En nøjere beregning og diskussion af forskydning i bjælker findes [6] og [7]. Deri findes også sammenligninger med forsøg, der viser at en lang række forskydningsproblemer for forskydningsarmeret og ikke forskydningsarmeret beton kan behandles ved hjælp af plasticitetsteorien.

## 6. Koncentreret belastning

Som vist foran kan plasticitetsteorien give gode resultater i armeret beton. Derimod er anvendelsen mere usikker i uarmeret beton.

Koncentrerede belastninger som vist på fig. 6 er et eksempel på et tilfælde, hvor det ikke er lykkedes, (og sandsynligvis ikke muligt), at finde bæreevner, der stemmer med forsøgsresultater, se [5] og [8]. Samtidig er det også et eksempel på, at man kan få udbytte af at vurdere, hvordan brud kan indtræde.

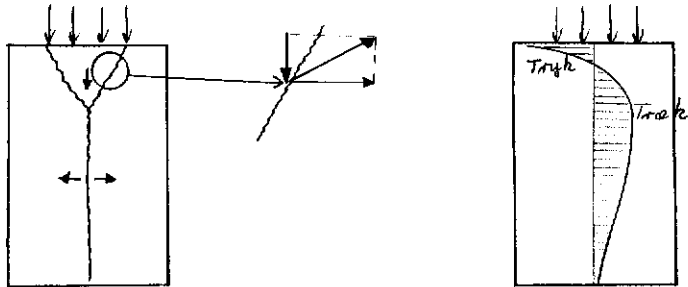


Fig. 6. Koncentreret belastning. Brudfigur og tværspringer midt under lasten.

Brudfiguren som vist på fig. 6 observeres ofte ved forsøg. For at øge bæreevnen ilægges en tværgående armering. Den placeres som regel der, hvor elasticitetsteorien viser, at den tværgående trækspænding er størst.

Bæreevnen er imidlertid uafhængig af armeringens placering, blot den ligger i nærheden af belastningen. Selv hvis armeringen placeres i elasticitetsteoriens trykzone, er dens bidrag til bæreevnen den samme. Det ses af brudfiguren, hvor man ser, at den vandrette komponent af deformationsvektoren langs de skrå brudlinier, er lig med deformationsvektoren ved den lodrette brudlinie. Der er her gjort den sædvanlige forudsætning, at armering kun optager kræfter i længderetningen.



## 7. Afslutning

Beton er her betragtet som et stift-plastisk materiale, der som brudbetingelse har Coulombs modificerede brudhypotese.

De viste eksempler illustrerer, at man for armeret beton kan opnå gode resultater, mens uarmeret beton kun sjældent kan beregnes efter plasticitetsteorien. Ved et eksempel er det også illustreret, at man kan få en god forståelse af bæreevneproblemerne ved at betragte mulige brudfigurer.

Man kan ikke sige, at den valgte brudbetingelse sammen med plasticitetsteorien er et alternativ til forskellige spødbrudsteorier, idet den ikke søger årsagen til brud eller følger brududviklingen, men kun betragter en sluttilstand. Derimod er det et godt værktøj, der uden større vanskeligheder kan anvendes ved beregning af bærende konstruktioners brudbæreevne.

Det skal også bemærkes, at det er en generel teori, der kan anvendes til behandling af mange forskellige problemer. Teoriens anvendelighed understreges bedst af at en del af de problemer, den har løst, tidligere var dækket af empiriske og semiempiriske formler.

## 8. Litteratur

- [1] Coulomb, C.A.: Essai sur une application des regles de maximis et minimis a quelques a problemes de statique, relatifs a l'architecture. Memoire présentés a l'Academie des Sciences. Paris 1773.
- [2] Richart, F.E., A. Brandtzæg og R.L. Brown: A study on the failure of concrete under combined compressive stresses. University of Illinois, Eng. Exp. Stat. Bull., No 185, 1928.
- [3] Richart, F.E., A. Brandtzæg og R.L. Brown: The failure of plain and spirally reinforced concrete in compression. University of Illinois, Eng. Exp. Stat. Bull., No 190, 1929.
- [4] Kupfer, M.: Das verhalten des betons unter mehrachsiger kurzzeitbelastung unter besonderer berucksichtigung der zweiachsigen beanspruchung. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Heft 229, Berlin 1973.
- [5] Jensen, B.C.: Nogle plasticitetsteoretiske beregninger af beton og jernbeton. Instituttet for Husbygning, Danmarks Tekniske Højskole, Rapport 111, 1976. Engelsk udgave, Rapport 123, 1977.
- [6] Nielsen, M.P. & M.W. Bræstrup: Plastic shear strength of reinforced concrete beams. Bygningsstatistiske Meddelelser, Vol 46, No 3, 1975.
- [7] Nielsen, M.P., M.W. Bræstrup, B.C. Jensen, Finn Bach: Concrete plasticity. Under udgivelse ved Dansk Selskab for Bygningsstatik.
- [8] Chen, W.F. & D.C. Drucker: Bearing capacity of concrete blocks or rock. Journal of the Eng. Mech. Div. ASCE, Vol EM4, 1969.



BRUDPROBLEMER MED HØJSTYRKEBETON

af H.H. Bache

Resume af indlæg præsenteret på Nordisk Forskningsseminar om Brudmekanik 29.09.77 på CBL.

I laboratorier verden over er der indenfor de sidste 10 år udviklet forskellige typer højstyrkebeton baseret på anvendelse af overfladeaktive stoffer, kraftig komprimering eller imprægnering med plast eller svovl.

Disse materialer er karakteriseret ved meget høj trykstyrke (120-200 MPa) og væsentlig større skørhed end vanlig beton.

Udnyttelse af højstyrkebeton må baseres på udnyttelse af materialets evne til at optage tryk og på at undgå de gener, der er knyttet til, at materialet er skørt.

Dette vil kunne ske ved konstruktionsudformning og gennem armering af materialet.

Gennem konstruktionsudformning og anvendelse af forspænding muliggøres etablering af tryk i betonmaterialet. Ved armering evt. fiberarmering er der mulighed for dels at indbygge tråkelementer som i vanlig armeret beton, dels at vanskeliggøre revneudbredelse og hermed gøre materialet mere plastisk.

Analytisk må man nok i større udstrækning anvende "brud mekanik" og måske adoptere en anden form for prøvning, statistisk behandling og kontrol, der bl.a. tager hensyn til følsomhed overfor indre inhomogeniteter og til det forhold, at styrken af skøre materialer er kraftig dimensionsafhængig.

Om der er penge i højstyrkebeton er vanskeligt at vurdere, da dets hovedanvendelse nok kommer til at ligge indenfor de endnu ikke udviklede konstruktions- og produkttyper, der specielt kan udnytte de nye styrkemuligheder.



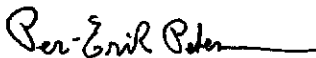
BYGGNADSMATERIALLÄRA  
Tekniska Högskolan i Lund  
Box 725  
220 07 LUND 7  
Tel. 046/124600

BROTTMEKANISK BERÄKNING AV KORTTIDS- OCH LÅNG-  
TIDSHÅLLFASTHET HOS BETONG MED HJÄLP AV FEM

(Inlägg vid forskningsseminarier om brottmekanik  
i Aalborg, 29 sept 1977)

Innehåll: Brottmekanisk beräkning av korttidshållfasthet hos betong med hjälp av FEM	1
Exempel på beräkningar gjorda med modellen + laboratorieförsök	6
Brottmekanisk beräkning av långtidshållfastheten hos betong med hjälp av FEM	8
Litteraturlista	10

Lund i september 1977



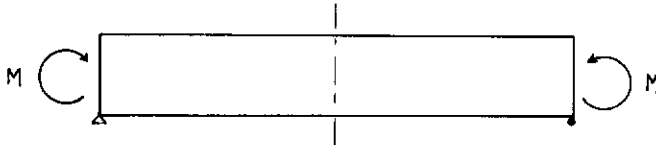
Per-Erik Petersson

BROTTEMEKANISK BERÄKNING AV KORTTIDSHÅLL-  
FASTHET HOS BETONG MED HJÄLP AV FEM

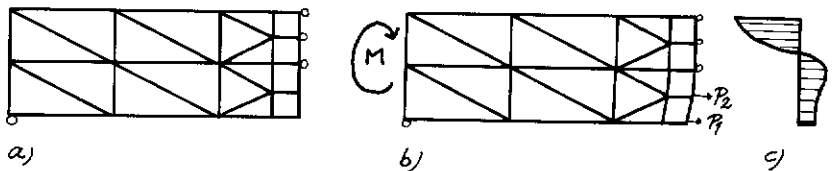
Detta föredrag är en fortsättning på prof. Arne Hillerborgs föredrag som behandlar de teoretiska förutsättningarna för vår beräkningsmodell.

Praktiskt utförande av beräkningarna

Beräkningarna utförs med hjälp av finita element-metoden (FEM). Vi har utvecklat tre principiellt olika metoder att göra beräkningarna. För att visa hur dessa fungerar och för att förklara de olika metodernas för- och nackdelar skall jag kortfattat beskriva uppläggningen av beräkningen av sprickutbredningen i en böjmomentbelastad fritt upplagd balk enligt fig. nedan.



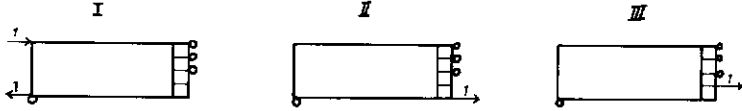
I FEM-beräkningarna utnyttjar vi symmetrisnittet och gör beräkningarna på t ex den vänstra delen. Fig. a) nedan visar hur elementindelningen kan se ut.



I figuren har vi antagit en sprickzon som sträcker sig genom halva balken. Fig. b) visar schematiskt hur balken deformeras vid belastning och vilka krafter som uppstår i sprickzonen. Figuren visar också vilken spänningsbild som kan uppstå i symmetrisnittet.

Metod I

Balken kan sägas vara belastad av de yttre lasterna M,  $P_1$  och  $P_2$ . Genom att skilja på dessa belastningar kan man erhålla tre lastfall.



Genom att superponera dessa elastiska lastfall på ett lämpligt sätt kan man erhålla det sammanlagda lastfallet. Man erhåller följande ekvationssystem

$$\left\{ \begin{array}{l} x_i = \sum_{j=1}^n (C_i^j P_j) + D_i M \\ P_i = \frac{x_{\max} - x_i}{x_{\max}} \cdot P_{\max} = (1 - \frac{x_i}{x_{\max}}) P_{\max} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} x_i = \text{def } i \text{ nodpunkt } i \\ x_{\max} = \text{max sprickbredd} \\ \text{som kan överföra} \\ \text{kraft} \\ P_{\max} = \text{max kraft i} \\ \text{nodpunkterna} \\ P_i = \text{kraft i nodpunkt } i \end{array}$$

$C_i^j$  och  $D_i$  är konstanter som erhålles från FEM-beräkningarna. Det ekvationssystem som erhålles kan lösas med hjälp av en minidator.

Ovanstående ekvationssystem ger krafter och deformationer vid ett givet moment. Om man vill studera vid vilket moment sprickan kommer att växa måste man införa ytterligare en ekv för att kunna lösa ut momentet:

$$P_{\max} = \sum_{i=1}^n (G_i P_i) + H \cdot M$$

där  $P_{\max}$  representerar brottspänningen vid sprickspetsen.  $G_i$  och  $H$  erhålles genom FEM-beräkningarna.

Fördelar med denna metod:

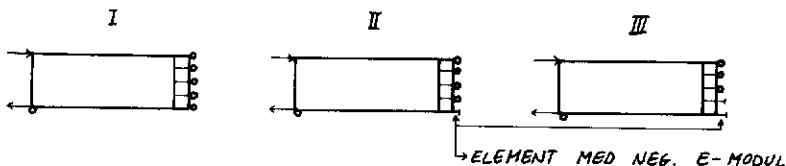
Har man väl bestämt konstanterna C, D, G och H för en dimension (E-modul,  $G_c$ ,  $f_t$ ) kan man lätt omforma ekva-

tionssystemet till att omfatta andra dimensioner (E-moduler,  $G_c$ ,  $f_t$ ). Detta kan man göra p g a att alla beräkningar är elastiska och därigenom vet man automatiskt hur konstanterna varierar med dimensionen (E-modul,  $G_c$ ,  $f_t$ ).

Nackdelar:

Man måste göra ett relativt stort antal FEM-beräkningar för att få fram värdena på konstanterna till en dimension.

### Metod II



I metod II införs element med negativ E-modul i sprickzonen. E-modulen och längden väljs så att elementens kraft-deformationskurva överensstämmer med den nedåtgående delen av betongens arbetskurva.

För att med denna metod bestämma vilket moment balken tål då sprickzonen nått till halva balkhöjden superponeras lastfallen I, II och III

$$M_{\text{tot}} = M_I + M_{II} + M_{III}$$

där

$M_I$  = det moment i lastfall I som ger brottspänning i nodpunkt 1

$M_{II}$  = det moment i lastfall II som tillsammans med  $M_I$  i lastfall I ger brottspänning i nodpunkt 2



$M_{III}$  = det moment i lastfall III som tillsammans med  $M_I$  i lastfall I och  $M_{II}$  i lastfall II ger brottspänning i nodpunkt 3.

Detta innebär att för att bestämma vilket moment balken tål då sprickzonen nått nodpunkt 4 behöver man bara göra en FEM-beräkning till, nämligen bestämning av  $M_{IV}$ .

Fördelar:

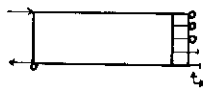
Färre beräkningar med FEM för en bestämd dimension.

Nackdelar:

Kan inte direkt översättas till andra dimensioner. Införandet av element med negativ E-modul gör att små modifikationer måste göras i de flesta tillgängliga FEM-programs lösningsrutiner.

### Metod III

De två tidigare beskrivna metoderna utgör lämpliga verktyg för beräkning av korttidshållfastheten hos betong. Då det gäller långtidsbrott är de mindre lämpliga eftersom det är svårt att kombinera dessa med det iterativa beräkningssätt som krävs vid krypningsberäkning. Här vill man istället ha en enda FEM-beräkning som direkt ger spänningsbilden i hela balken. Detta kan göras på följande sätt



element med negativ elasticitetsmodul som getts en lämplig fördeformation

Elementen med negativ E-modul ges en fördeformation så att de anpassas till den nedåtgående delen på arbetskurvan. Detta innebär att spänningen i elementen är  $P_{brott}$  då sprickzonen har bredden 0 och att spänningen minskar i elementen då sprickbredden ökar. Läger man

sedan på ett yttre moment får man direkt spänningsbilden i balken.

Fördelar:

En enda beräkning ger spänningsbilden i balken. Lämplig att kombinera med krypning.

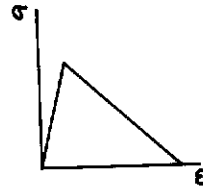
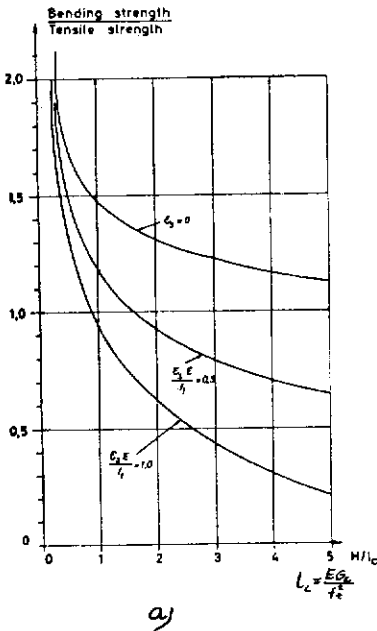
Nackdelar:

Man måste i förväg veta hur lång sprickzonen är så att man ger fördeformationen till rätt antal element. Man kan inte direkt beräkna maximalt moment för en given sprickzonslängd.

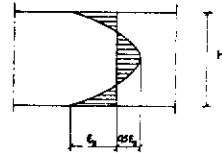
Exempel på beräkningar gjorda med modellen + laboratorieförsök

Böjdraghållfasthetens variation med olika storheter, bl a balkhöjd

Med hjälp av beräkningsmetod 1 har vi studerat hur böjdraghållfastheten varierar som funktion av balkhöjd,  $E$ ,  $G_c$  och  $f_t$  (draghållfasthet). Resultatet kan anges som ett samband mellan böjdraghållfasthet och den dimensionslösa parametern  $H \cdot f_t^2 / E \cdot G$  och visas i figur a) nedan. I beräkningarna har antagits att betongen har en arbetskurva enligt figur b).



b)

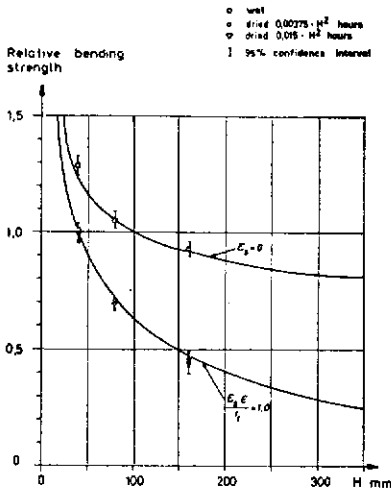


c)

I beräkningarna har även tagits hänsyn till krympspänningarna i betong som utsatts för uttorkning. Krympspänningarnas fördelning har antagits enligt Figur c) ovan.

För att testa resultatets giltighet gjordes böjförsök på betongbalkar med olika höjd och varierande uttorkningstid.

Resultatet framgår av nedanstående figur.



Försöksresultaten visar mycket god överensstämmelse med resultatet av de teoretiska beräkningarna. För att erhålla de teoretiska kurvorna har vi använt värden som är rimliga för den använda betongen ( $E = 20.000 \text{ MN/m}^2$ ,  $f_t = 2 \text{ MN/m}^2$  och  $C_c = 20 \cdot 10^{-6} \text{ MN/m}$ ). Då det gäller den undre kurvan har vi valt värdet på  $\frac{\epsilon_s E}{f_t}$  till 1.0 som verkar ge bra resultat.

BROTTMEKANISK BERÄKNING AV LÅNGTIDSHÅLLFASTHETEN HOS  
BETONG MED HJÄLP AV FEM

Genom att kombinera de två välkända brottmekaniska sambanden

$$K_{IC} = \sigma_c \sqrt{C} \cdot \alpha \quad (1)$$

och

$$G_c = K_{IC}^2 / E \quad (2)$$

erhålles

$$\sigma_c = K_1 \sqrt{G_c \cdot E} \quad (3)$$

$K_1$  är en konstant som beror på provkroppens och sprickans form.

Man kan förutsätta att  $K_1$  och  $G_c$  är oberoende av belastningstidens längd. Detta medför att man för en bestämd provkropp kan skriva:

$$\sigma_c = K_2 \sqrt{E} \quad (4)$$

E-modulen kan formellt antas variera med tiden på följande sätt

$$E(t) = \frac{\sigma}{\epsilon_0 + \epsilon_{cr}} = \frac{E_0}{1 + \phi(t)} \quad (5) \quad \phi(t) = \text{kryptalet}$$

och (4) + (5) ger

$$\sigma_c(t) = K_3 \frac{1}{\sqrt{1 + \phi(t)}} \quad (6)$$

vilket innebär att

$$\frac{\sigma_c(t)}{\sigma_c(0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \phi(t)}} \quad (7)$$

Kryptalet för betong efter lång tid kan uppskattas till 1.5-3 vilket innebär att långtidshållfastheten skulle vara 50-60% av korttidshållfastheten. För betong inverkar hållfasthetstillväxten kraftigt på detta resultat och den verkliga långtidshållfastheten är betydligt större.

Ovan skisserade modell är mycket grov och kan inte göra anspråk på att beskriva verkligheten på ett tillfredsställande sätt.

I vårt projekt är det meningen att vi på samma sätt som i denna enkla modell skall kunna beräkna långtidshållfastheten med hjälp av materialets krypkurva. Om man kan göra detta är mycket vunnet eftersom man kan extrapolera krypkurvan betydligt noggrannare än kurvan för den tidsberoende hållfastheten.

Modellen skall bli en vidareutveckling på den tidigare beskrivna modellen för beräkning av korttidshållfasthet. Genom att införa krypning skall vi kunna studera hur hållfastheten varierar med tiden. Vid dessa beräkningar är den lämpligt att använda den tidigare beskrivna metod 3.

Arbetet med denna del har just påbörjats och innehåller ett par svårigheter som måste lösas.

1. Krypning hos betong och andra material kan i bästa fall anses vara linjär upptill en belastning som är 50% av brottlasten. I närheten av sprickspetsen kommer spänningar att uppstå som är mycket nära brottspänningen. Man kan alltså inte anta linjär krypning. Några färdiga FEM-program som behandlar icke-linjär krypning finns inte och att ta fram ett sådant program är ett omfattande arbete.
2. Vid laboratorieundersökning av långtidshållfastheten för olika material har resultaten ofta visat upp en sådan spridning att man inte kunnat dra några slutsatser. Detta beror bl a på att variationen i korttidshållfastheten är stor. För att komma till rätta med detta måste man på ett bättre sätt än nu kunna mäta korttidshållfastheten på varje enskild provkropp. Alternativet är att göra försök med ett stort antal provkroppar.

LITTERATURLISTA

- /1/ Petersson, P-E      Brottmekanisk modell för beräkning av sprickutbredning i betong, institutionen för Byggnadsteknik, Lunds Tekniska Högskola, Rapport nr 70, 1976
- /2/ Hillerborg, A      Analysis of crack formation and  
Modéer, M            crack growth in concrete by means  
Petersson, P-E      of fracture mechanics and finite  
                         elements. Cement and concrete  
                         research, Vol. 6, pp. 773-782, 1976.  
                         Pergamon Press, inc.
- /3/ Petersson, P-E      Laboratorieförsök för att utreda balkhöjdens och uttorkningstidens inverkan på böjdraghållfastheten hos betong. Internrapport, avd Byggnadsmateriallära, LTH, 1976





7034 - TRONDHEIM - NTH

TELEFON: (075) 30 100  
SINTEF: (075) 40 120

RAPPORTENS TITTEL	DATO
NOTCH SENSITIVITY AND FRACTURE TOUGHNESS OF CONCRETE	1977-08-30
SAKSBEARBEIDER/FORFATTER	ANTALL SIDER OG BILAG
O.E. Gjørv, S.I. Sørensen and A. Arnesen	15
SEKSJON	PROSJEKTANSV. / SIGN.
Cement and Concrete Technology	O.E. Gjørv
	OPPDRAKSNUMMER

OPPDRAKSGIVER	OPPDRAKSGIVERS REF.

**EKSTRAKT** Whether rules based on fracture mechanics or classical mechanics should be used as a basis for design and analysis depends on the notch sensitivity as well as the fracture toughness of the material. Therefore, information about these properties of all structural materials is important. Experiments were undertaken to investigate the notch sensitivity and fracture toughness of concrete with different types, volumes, sizes and strengths of aggregate. The investigation which was carried out on small flexural specimens with notches of lengths up to 25 mm, indicates that both mortar and concrete are notch sensitive materials although not so sensitive as neat cement paste. If the assumption is valid that the fracture of neat cement paste is governed by the established theory of linear fracture mechanics, it appears that this theory is not applicable to small-size members of mortar and concrete. Light-weight concrete appears to have about the same fracture properties as neat cement paste.

3 STIKKORD

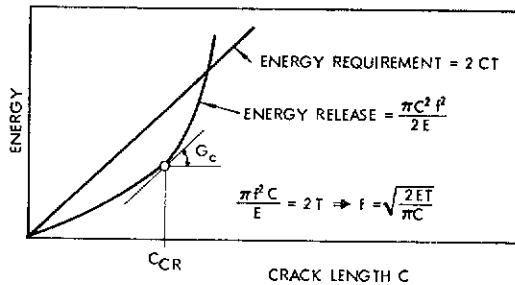
Concrete
Fracture Mechanics
Testing

Introduction

During the last 15 years the fracture of portland cement concrete has been extensively studied both experimentally and theoretically. Since concrete is a brittle material with a strain at rupture considerably less than that of ductile materials, several investigators have also attempted to apply the Griffith theory of brittle fracture to concrete. The basic concept in the Griffith theory primarily deals with instability in propagation of a single crack through a homogeneous and elastic material. Since fracture of concrete involves growth of several microcracks and since concrete is both a heterogenous and highly inelastic material, the Griffith theory is not directly applicable to concrete.

According to the Griffith theory instability in crack growth occurs when the rate of strain energy release becomes equal the slope of the energy requirement curve expressed by the surface energy of an elliptical crack as demonstrated in Fig. 1. Glucklich (1) proposed that concrete exhibits an energy

FIG. 1  
Griffith case.



requirement curve with a slope that increases with the crack length as shown in Fig. 2. The increasing slope may be explained by the fact that crack propagation in concrete takes place through several microcracks rather than by propagation of a single crack. In concrete, therefore, the surface area of the cracks will increase more rapidly than in a "Griffith material", and a gradual increase in the energy demand will be the result. With reference to Fig. 2, an initial crack of length  $C_0$  will start growing at the stress  $f_0$ , but will soon be arrested at  $C_1$  because of the higher energy demand. A higher stress  $f_1$  is then required to propagate the crack further. This step-wise stable crack growth will continue until the critical crack length  $C_{CR}$  is reached. At this point the slope of the energy requirement curve ceases to increase, and the crack will grow spontaneously.

Moavenzadeh and Kuguel (2) have shown that quantitative microscopy can be used to measure the total surface area of the cracks developing during fracture of concrete. They also found

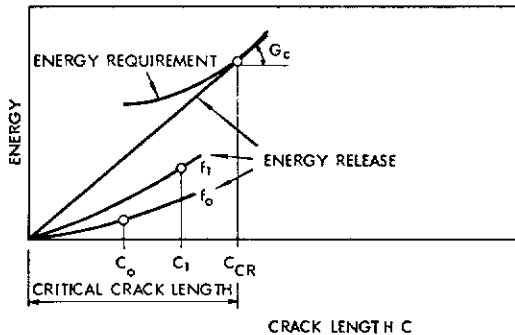


FIG. 2  
Modified Griffith  
case (1)

that the energy required to break a concrete beam of a given cross section is considerably higher than that required to break identical cement paste and mortar beams. This demonstrates that the fracture toughness is increased when aggregate is added to the cement paste.

Although Glucklich's modification of the Griffith theory probably gives a good qualitative description of the real behavior of concrete and test procedures also exist for determination of the total surface area of the cracks developing during fracture, it may be difficult to obtain quantitatively, satisfactory expressions for the variable energy demands. From an overall point of view, however, it may be more important to know the notch sensitivity or the critical length of cracks for concrete. As the material is notch insensitive for crack lengths smaller than the critical length, the application of classical mechanics may be appropriate for design and analysis in this range of stable crack propagation. Thus, it is desirable to know whether the critical length for concrete is of macroscopic dimensions which is true for ductile metals, or of microscopic dimensions such as for brittle glasses. This has been the background for various investigations carried out. Shah and McGarry (3) studied the notch sensitivity of concrete with different types, volumes and sizes of aggregate by flexural testing of notched specimens. According to their findings only neat cement paste was notch sensitive, while both mortar and concrete were insensitive to flaw sizes up to 25 mm (Fig. 3). In Fig. 3 the relative values of flexural strength is plotted against the length of the notch.

Also based on previous work carried out by Huang (4), Imbert (5), Kaplan (6) and Naus and Lott (7) Shah and McGarry concluded that both mortar and concrete, with the normally used amounts of aggregate are notch insensitive materials for notches of varying sharpness and of lengths up to at least a few inches.

Similar results as that observed by Shah and McGarry in Fig. 3 have also been observed in previous investigations at the University of Trondheim, NTH (8, 9). In Fig. 3 it can be seen,

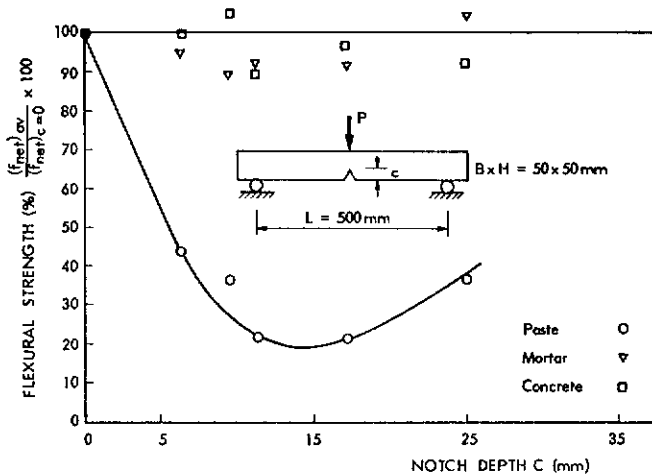


FIG. 3

Effect of notch on flexural strength (3).

however, that the cement paste first shows an increasing notch sensitivity up to a notch depth of a certain magnitude, about 15 mm, and then shows a decreasing sensitivity for further increase in notch depth. That a material shows such a behavior seems peculiar, and this effect was not discussed by Shah and McGarry. The observed reduction of notch sensitivity for notches exceeding a certain magnitude may be due to the particular testing procedure used and hence not reflect the true behavior of the material itself. If this is so it is likely also that the observed test results for mortar and concrete have been affected by the testing procedure. Experiments were therefore undertaken in order to analyse the testing conditions and to provide more information on the notch sensitivity of concrete.

Experimental Details

Flexural tests were carried out on hardened portland cement paste, mortar, and concrete with three-point loading of

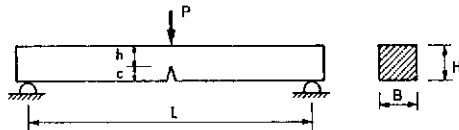


FIG. 4

Flexural test specimen.

L = 500 mm  
 B = 50 mm  
 H = 50 mm

beams 50 x 50 x 550 mm. The beams had sharp-edged notches at mid-span of the tensile face as shown in Fig. 4. The angle at the apex of the notch was approximately 20°, and the depths of the notches were 0, 5, 15 and 25 mm. For each mix 24 sepcimens were made, six of each notch depth. The testing was performed in an Instron at a rate of 0,1 mm per. min.

The different test series are shown in Table 1. The cement used was a PC 375 (ASTM Type III), the fine aggregate was primarily fine grained granite, and the coarse aggregate was a

TABLE 1  
Test Program

Test Series	Material	Max Aggr. Size (mm)	Mix Proportions by Weight					Beam Support		
			Cement	Aggregate (mm)				w/c	Fixed	Freely moving
				0-1	0-4,76	4,76-9,5	1-16			
1	Paste	-	1	-	-	-	-	0,5	x	
2	Mortar A	1,0	1	1	-	-	-	0,5	x	
3	Mortar B	1,0	1	2	-	-	-	0,5	x	
4	Mortar C	4,76	1	-	2	-	-	0,5	x	
5	Concrete A	16,0	1	-	-	-	2	0,5	x	
6	Concrete B		1	-	1	1	-	0,5	x	
7	Light-weight Concrete	16,0	1	-	-	-	0,66	0,5	x	
8	Mortar A	1,0	1	1	-	-	-	0,5		x

crushed fine grained gabbro. In the lightweight concrete expanded clay was used both as fine and coarse aggregate. For both mortar and concrete two different maximum sizes of aggregate were used, 1,0 and 4,76 mm for the mortar, and 9,5 and 16,0 mm for the concrete, respectively. The water-cement ratio was 0,5 by weight for all the specimens. For the mortar specimens, two aggregate-cement ratios by weight were used: 1,0 and 2,0. For the concrete specimens, aggregate-cement ratio by weight was 2,0. For the lightweight concrete (test series 7) the volume and grading of lightweight aggregate was identical with the volume and grading of aggregate in the corresponding normal-weight concrete (test series 5). In producing the paste specimens bleeding was prevented by adding a small quantity of prehydrated cement paste according to the procedure reported by Markestad (10).

Specimens were cast in steel molds and the notches were brass knives attached to the molds before casting. During the

first 24 hrs the specimens were stored at 20° C and 100% RH. After that, the molds were stripped and the specimens cured in water of 40° C for at least 21 days before testing. The specimens were tested in water saturated condition.

For test series 1 to 7 in Table 1 a set-up with fixed beam supports were used. Although the shape of the supports were rounded with a radius of 5 mm the supports were supposed to yield a considerable degree of friction and hence introducing horizontal forces in the supports. In series 8, however, efforts were made to minimize this friction by using two circular steel rods of diameter  $\phi$  12 mm which could freely move as shown in Fig. 5.

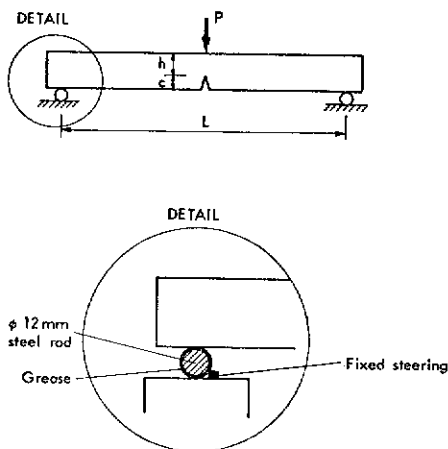


FIG. 5  
Test specimen on  
freely moving support.

### Test Results and Discussion

The results of test series 1 to 7 are summarized in Table 2 and Fig. 6. The net modulus of rupture,  $f_{net}$ , is calculated on the basis of net cross section at the mid-span and the beam theory:

$$f_{net} = \frac{3L}{2B(H-c)^2} P_{ult} \quad (1)$$

where  $P_{ult}$  is the ultimate load at fracture. In Fig. 6 each point is the average of six specimens. As can be seen from the diagram the results are in good agreement with that observed by Shah and McGarry (3), although not so much for the mortar and concrete as for the paste (Fig. 3). The notch sensitivity is most pronounced for the cement paste, and this indicates that cracks propagating through these materials will meet the least arrest.

TABLE 2

Relationship between Flexural Strength and Notch Depth. Stresses from Beam Theory

Notch Depth (mm)	$f_{net}$ (MPa)						
	Paste	Mortar A	Mortar B	Mortar C	Concrete A	Concrete B	Lightweight Concrete
0	6,04	6,52	6,27	5,73	4,98	5,60	3,90
5	2,43	4,15	4,61	5,48	4,50	5,37	2,16
15	2,40	3,98	4,59	4,88	3,90	4,76	1,99
25	3,17	4,74	4,97	5,12	4,00	4,56	2,28

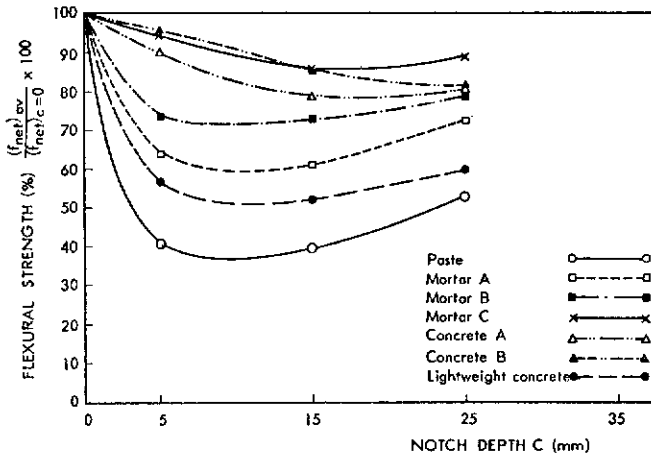


FIG. 6

Effect of notch depth on flexural strength. Stresses from beam theory.

For all the curves in Fig. 6, however, the reduction of notch sensitivity for notches exceeding a certain magnitude is also clearly demonstrated. In order to explain this phenomena the stress calculation for two beams with different cross sections will be considered, one having a cross section of  $B \times H$  with a notch of depth  $c$  and the other having a cross section of  $B \times h$  without a notch and where  $h = H - c$ . Thus, both beams have an "effective" depth  $h$ . The mid-span bending moment is  $M = P_{ult}l/4$  and the section moduli are  $W_a = B(H-c)^2/6$  and  $W_b = Bh^2/6$  for the beam with and without notch, respectively. Hence the maximum flexural stresses are given by Eqs. 2 and 3:

With notch:  $f = \frac{3L}{2B} \frac{1}{(H-c)^2} P_{ult}$  (2)

Without notch:  $f = \frac{3L}{2B} \frac{1}{h^2} P_{ult}$  (3)

The relationships between the ultimate load,  $P_{ult}$ , and the effective depth,  $h$  and between  $1/h^2$  and  $h$  are shown in Figs. 7a and 7b, respectively, while Fig. 7c shows the products of these curves demonstrating the relationship between maximum flexural stress and effective depth. As  $1/h^2 = 1/(H-c)^2$  the curves in Fig. 7b coincide. The ultimate load curve for a beam without notch is a second order parabola (the solid line of Fig. 7a), and the product curve in Fig. 7c is a straight line (constant stress). To obtain a curve which deviates from the straight line in Fig. 7c for a notched beam and thus indicating notch sensitivity, the failure load curve for this beam has to start out with a steeper gradient than that of the parabola, as shown by the dotted line of Fig. 7a. This curve also has to express zero load when  $c = H$ . Hence, the product curve for a notched beam must have a shape as indicated by the dotted line in Fig. 7c.

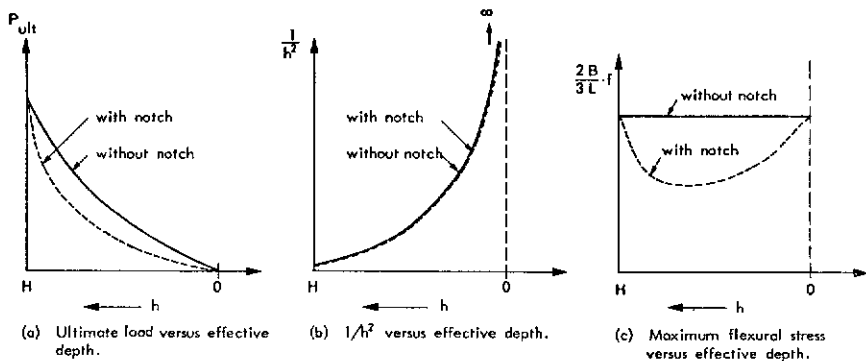


FIG. 7

Shape of the curves relating flexural strength to notch depth.

It should be noted, however, that calculations based on Eqs. 2 and 3 require that the beam support is allowed to freely move horizontally, and for the test series 1 to 7 this was not consistent with the actual testing conditions. In test series 8, therefore, efforts were made to meet the requirement of a more ideal frictionless support.

In test series 8 mortar specimens identical with that in test series 2 were used, and the flexural strengths calculated on the basis of Eqs. 1, are shown in Fig. 8. For comparison the



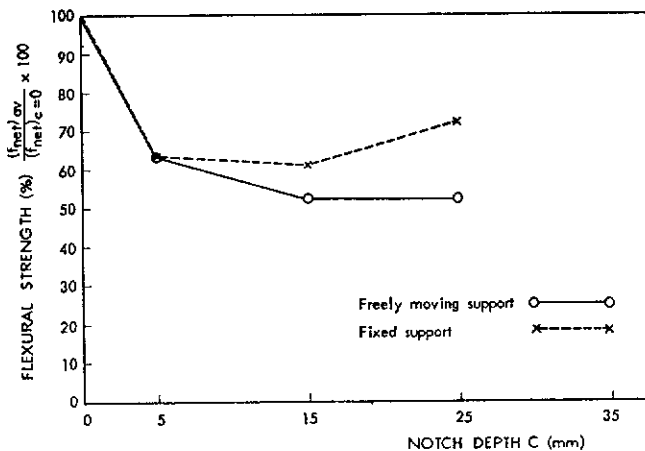


FIG. 8

Effect of support conditions on the curve relating flexural strength to notch depth. (Mortar A)

results of test series 2 with fixed supports are also plotted in this diagram. For the beams with freely moving supports the apparent reduction of notch sensitivity for notches exceeding a certain magnitude has almost disappeared, and thus the great effect of support conditions is clearly demonstrated. Although efforts were made in test series 8 to minimize friction in the beam support it is reasonable to assume that this support still yielded some resistance against horizontal movement due to friction.

Since the results in Fig. 8 indicate that friction is involved in the supports, Eqs. 1-3 based on net cross sections will not give correct stresses. In order to obtain a better basis for determination of stress distributions, a finite element analysis computer program (11) was applied. Finite elements of linear strain triangle (LST) were used, and a plane stress situation and linear elastic material properties were assumed. Due to symmetry, only half of the beam was modelled as shown in Fig. 9. The notch was simulated by allowing nodal points at the notch boundary to move horizontally. Fig. 9 shows a beam with a 15 mm notch. Since the support in test series 1 to 7 was assumed to resist horizontal movement almost completely, the corresponding degree of freedom was fixed in the computer analysis. In order to demonstrate the effects of the support conditions, an additional example was run, assuming ideal frictionless support. Figs. 10 and 11 show KINGMATIC plots of the principal stresses in the nodal points of a beam with 15 mm notch, both for free and fixed supports, respectively. Solid lines indicate compressive stresses, and the length of a line defines the magnitude of stress at one point relative to another. As can be seen the magnitude and distribution of stresses are considerably affected by the support conditions.

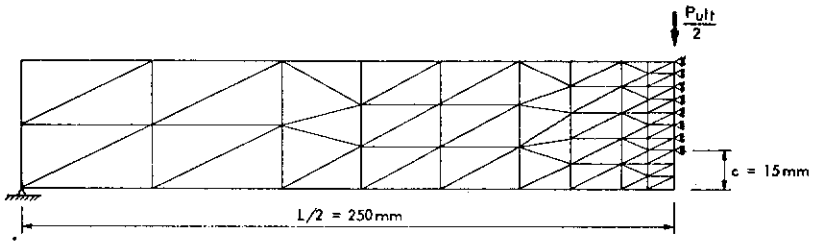


FIG. 9

Element mesh for half of the beam.

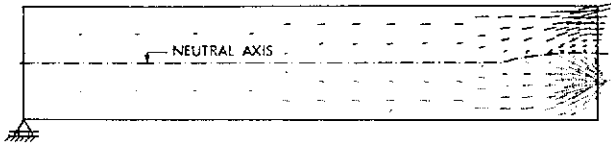


FIG. 10

Kinematic plots showing principal stresses for freely moving support ( $c = 15\text{ mm}$ ).

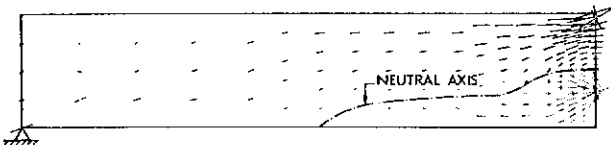


FIG. 11

Kinematic plots showing principal stresses for fixed support ( $c = 15\text{ mm}$ ).

The finite element analysis of the experimental observations from test series 1 to 7 are summarized in Table 3 and Fig. 12. In this diagram both the mortar and concrete as well as the paste all clearly appear to be notch sensitive materials. For smaller notches, i.e. less than about 5 mm, the notch sensitivity is considerably different for the various mixes, while for larger notches of about 25 mm, the notch sensitivity is very much the same for paste, mortar and concrete. These results indicate that even a small notch of a few millimeters may be relatively large compared with inhomogeneities in the cement paste while they may be of the same order as that in the concrete. For larger notches, however, the notches may be relatively large compared with the inhomogeneities, both in the paste and the concrete.

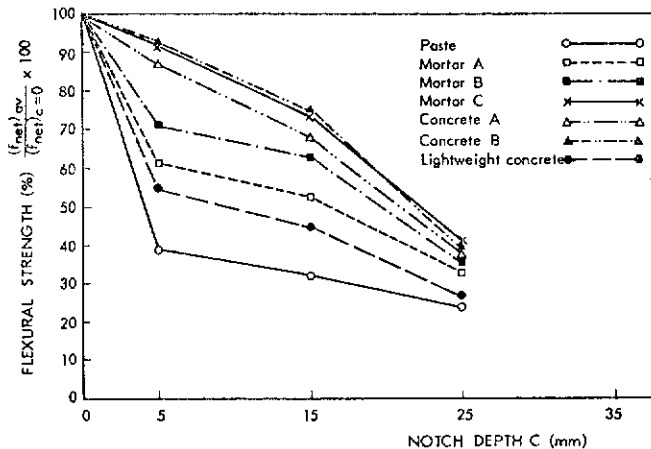
TABLE 3

Relationship between Flexural Strength and Notch Depth. Stresses from Finite Element Analysis.

Notch Depth (mm)	$f_{net}$ (MPa)						
	Paste	Mortar A	Mortar B	Mortar C	Concrete A	Concrete B	Lightweight Concrete
0	3,07	3,31	3,19	2,91	2,53	2,85	1,98
5	1,19	2,04	2,26	2,69	2,21	2,64	1,06
15	0,97	1,74	2,01	2,15	1,72	2,10	0,89
25	0,73	1,08	1,14	1,17	0,92	1,05	0,52

A comparison of the curve for mortar A in Fig. 12 with the corresponding curve for freely moving support in Fig. 8 demonstrates that the set-up used for the freely moving support (Fig. 5) still yielded some resistance due to horizontal friction. It appears, therefore, that even small forces due to friction may have a substantial effect on the flexural testing of notched specimens.

FIG. 12  
Effect of notch depth on flexural strength. Stresses from finite element analysis.



It should be noted that the above computer analysis was only carried out with the purpose of obtaining a basis for evaluating the effect of friction forces in the supports. It was not the intention to carry out an analysis based on fracture mechanics and to obtain stress intensity factors. Since both mortar and concrete were found to have a certain degree of notch sensitivity, however, it would be interesting also to see whether the fracture of these materials would follow the established rules of linear fracture mechanics. Therefore, calculations of stress intensity factors were carried out, and for these calculations analytical expressions given by Tada et. al (12) were used.

In order to take into account the friction of the beam support, three different loading conditions were superposed. The first loading condition was a three-point loading, the second one a constant moment loading, and the third one a constant axial loading. In order to find the magnitude of horizontal friction, however, it was assumed that linear fracture mechanics would apply to the fracture of the neat cement paste specimens. Hence, for these particular specimens the critical stress intensity factor,  $K_{Ic}$ , should be a constant for all notch depths.

For the cement paste specimens an approximately constant value of  $K_{Ic}$  was obtained for a horizontal force  $P_h$  of:

$$P_h = 2,08 P_{ult} \quad (4)$$

where  $P_{ult}$  is the ultimate load. The above magnitude of  $P_h$  appears to be very high indicating that the specimens were firmly fixed horizontally. The reason for this may be due to the difference in friction at rest and when moving. Since the determination of  $K_{Ic}$  from experimental data often shows some deviations from a constant value, the assumption of a constant  $K_{Ic}$  for the paste specimens may also have some influence on the magnitude of  $P_h$ .

However, the obtained expression for  $P_h$  was used in order to find  $K_{Ic}$  also for the other test series shown in Table 1, assuming that the coefficient of friction was approximately the same for both the paste, mortar and concrete specimens. The three before mentioned loading conditions were superposed, and the obtained values of critical stress intensity factors are shown in Table 4 and Fig. 13.

TABLE 4  
Critical Stress Intensity Factors

Test Series	Material	$K_{Ic}$ (N/mm <sup>3/2</sup> )		
		c = 5 mm	c = 15 mm	c = 25 mm
1	Paste	3,35	3,04	3,16
2	Mortar A	5,75	5,66	4,74
3	Mortar B	6,36	6,39	5,00
5	Concrete A	6,20	5,44	4,05
6	Concrete B	7,49	6,80	4,62
7	Light-Weight Concrete	3,00	2,88	2,37

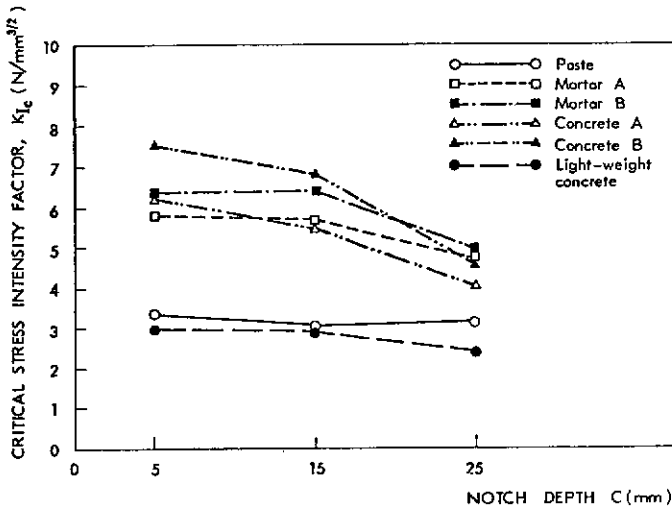


FIG. 13  
Effect of Notch Depth on Critical Stress Intensity Factors

From Fig. 13 it can be seen that neither mortar nor concrete showed a constant value of  $K_{Ic}$ , while the light-weight concrete appeared to behave more like the neat cement paste. That the light-weight concrete and the cement paste showed very much the same fracture properties may be reasonable since in light-weight concrete the cracks will easily propagate through the aggregate particles.

Walsh (13) carried out experiments by flexural testing of notched concrete specimens of variable depth with constant notch-to-depth ratio. These experiments indicated that only specimens of structural size were sensitive to effects of stress concentrations, and Walsh concluded that if a pre-cracked concrete member is large enough, i.e. depth of member larger than approx. 225 mm, the fracture analysis can be based on a critical stress intensity factor in accordance with the theory of linear fracture mechanics. Otherwise, the failure load would be consistent with the modulus of rupture based on the net cross section.

The present investigation confirms the conclusion of Walsh that linear fracture mechanics does not seem to apply to concrete specimens of small sizes. The depth of specimens used herein was only 50 mm. Even for these small specimens, however, the present test results clearly indicate that the concrete showed a certain degree of notch sensitivity. Hence, it appears that the failure load of these concrete specimens is not consistent with the modulus of rupture based on the net cross section.

### Conclusions

On the basis of the experimental results and analysis presented in the present paper the following conclusions appear to be warranted:

1. If the assumption is valid that the fracture of neat cement paste is governed by the established theory of linear fracture mechanics, it appears that this theory is not applicable to small-size members of mortar and concrete. Light-weight concrete, however, appears to have about the same fracture properties as neat cement paste.
2. Even for small-size members both mortar and concrete appear to have a certain degree of notch sensitivity. Hence, the failure load will not be consistent with the modulus of rupture based on the net cross section.
3. To some extent the notch sensitivity was influenced by the volume, maximum size, and strength of the aggregate. Thus, for smaller notches, i.e. less than about 5 mm, the notch sensitivity was considerably different for paste, mortar and concrete, while for larger notches of about 25 mm, the effect of volume, maximum size, and strength of the aggregate was considerably reduced.
4. For further studies on fracture of concrete based on flexural testing, efforts should be made to avoid the problems concerning friction forces in the beam supports. Furthermore, a more detailed examination on the effects of member size should be carried out.

### References

1. Glucklich, J.: "Fracture of Plain Concrete", J. Engr. Mechn. Div., ASCE, Vol. 89, No. EM6, Proc., December 1963, pp. 127-238.
2. Moavenzadeh, F. and Kuguel, R.: "Fracture of Concrete", J. Matrs. JMLSA, Vol. 4, No. 3, Sept. 1969, pp. 497-519.
3. Shah, S.P. and McGarry, F.: "Griffith Fracture Criterion and Concrete", J. Engr. Mechn. Div., ASCE, Vol. 97, No. EM6, Proc., December 1971, pp. 1663-1676.
4. Huang, T.S.: "Crack Propagation Studies in Micro-Concrete", Thesis presented to the University of Colorado in partial fulfillment for the degree of Master of Science, 1966.
5. Imbert, I.D.C.: "The Effects of Holes on Tensile Deformations in Plain Concrete", Annual Conference, Highway Research Board, January 1970.

6. Kaplan, M.F.: "Crack Propagation and the Fracture of Concrete", J. ACI, Vol. 58, No. 5, November, 1961, pp. 591-610.
7. Naus, D.J. and Lott, J.L.: "Fracture Toughness of Portland Cement Concrete", J. ACI, Vol. 66, No. 6, June 1969, pp. 481-489.
8. Flem, B.K. et al.: "Notch Sensitivity of Cement Paste, Mortar and Concrete", (In Norwegian), Division of Structural Materials, The University of Trondheim, NTH, Norway, Student Report (not published), May 1973, 20 p.
9. Solberg, E. et al.: "Notch Sensitivity of Concrete", (In Norwegian). Division of Structural Materials, The University of Trondheim, NTH, Norway, Student Report (not published), December 1974, 11 p.
10. Markestad, A.S.: "Proposal for a Reliable Method of Determining the Strength Properties of a Cement Paste", (In German) Zement-Kalk-Gips, No. 9, 1972, pp. 419-425.
11. Syvertsen, T.G.: "FIESTA - Finite Element Structural Analysis Program" Division of Structural Mechanics, The University of Trondheim, NTH, Norway 1975.
12. Tada, H., Paris P.C. and Irwin, G.R.: "The Stress Analysis of Cracks Handbook," Del Research Corporation, Hellertown, Pennsylvania, 1973.
13. Walsh, P.F.: "Fracture of Plain Concrete," Indian Concrete Journal, November 1972, pp. 468-470, 476.





Rapport nr Fo 7709  
1977-09-27

---

SPRICKUTBREDNING OCH HÅLLFASTHET  
VID DYNAMISK BELASTNING

Göran Fagerlund  
Tekn dr

---

CEMENT- OCH BETONGINSTITUTET  
Forskningsfunktionen

Rapporten presenterad vid Nordiska Betongförbundets  
Forskningskommittés seminarium "Brottmekanik" i Aalborg  
den 29 sept 1977.

INNEHÅLL	Sid	
1	INLEDNING	129
2	BROTTVILLKOR FÖR IDEELLT SPRÖDA MATERIAL VID DYNAMISK BELASTNING	129
2.1	Sprickhastighet och erforderlig tid för brott "	
2.2	Steveding-Lehnigk's teori /3/ och implika- tioner av denna	133
2.3	Effekt av upprepad belastning	136
2.4	Effekt av sprickans placering i provstaven	138
3	BROTTVILLKOR FÖR VISKOELASTISKA MATERIAL VID DYNAMISK BELASTNING	141
3.1	Allmänt	141
3.2	Hooke-material	142
3.3	Kelvin-material	142
3.4	Maxwell-material	148
3.5	Burgers-Body-material	151
3.6	Sammanfattning av punkter 3.2 till 3.5	154
3.7	Tillämpning på cementpasta	154
4	EXPERIMENTELLA MÄTNINGAR AV SLAGHÅLLFAST- HET HOS BETONG	159
	Litteratur	163

## 1 INLEDNING

Erfarenheten visar att de flesta material får högre hållfasthet ju snabbare belastningen är. Hållfasthetshöjningen är emellertid starkt beroende av materialets deformationskaraktistika; för sega metaller kan hållfasthetshöjningen vara flerfaldig; för mycket spröda material är hållfasthetshöjningen ofta obetydlig även vid mycket snabb belastning.

I denna rapport görs ett försök till kvalitativ förklaring av dessa skillnader. Rapporten är en mycket kortfattad version av en betydligt mer omfattande rapport med namnet "Fracture Criteria For Brittle And Quasi-Brittle Materials at high Rates of Loading". Denna rapport är delvis färdig i manusform och blir eventuellt publicerad någon gång i framtiden.

## 2 BROTTVILLKOR FÖR IDEELLT SPRÖDA MATERIAL VID DYNAMISK BELASTNING

### 2.1 Sprickhastighet och erforderlig tid för brott

Den närmast till hands liggande förklaringen till att hållfastheten stiger när belastningshastigheten ökar är att sprickutbredningen är en tidskrävande process. Den hinner därför inte bli fullt utbildad vid en kortvarig belastning även när denna medför en större spänning än brottspänningen vid "statisk last".

Vi behandlar därför sambandet mellan sprickutbredning och belastningstid för det ideellt spröda materialet.

En energibetraktelse ger följande uttryck för sprick-  
utbredningshastigheten:

$$\dot{c} = 0,38 \cdot a \left[ 1 - \frac{c_0}{c} \right]^{1/2} \quad (1)$$

där a är ljudhastigheten i en tunn stav av materi-  
alet ( $a = \sqrt{E/\bar{\gamma}}$ ), och  $c_0$  är spricklängden före  
sprickutbredning.

Ekv (1) kan också skrivas:

$$\dot{c} = \dot{c}_\infty \left[ 1 - \frac{c_0}{c} \right]^{1/2}$$

där  $\dot{c}_\infty$  är sprickutbredningshastigheten vid oänd-  
ligt lång tid. Härledningen av ekv (1) görs i /1/.  
(Det kan nämnas att enligt härledning av Broberg  
/2/ är  $\dot{c}_\infty = a_s$  vilken är hastigheten för s k Rayleigh-  
vågor.  $a_s = 0,58a$  vid  $\nu = 0,25$  och  $a_s = 0,55a$  vid  $\nu = 0,50$ .)  
För en utförlig analys av sprickutbredningens kine-  
tik hänvisas till Erdogan /9/.

Ekv (1) har utritats i FIG 1. Som synes växer sprick-  
utbredningshastigheten mycket snabbt mot sitt gräns-  
värde.

Lösningen till ekv (1) är

$$c_0 \left\{ \ln \left[ \sqrt{\frac{c}{c_0} - 1} + \sqrt{\frac{c}{c_0}} \right] + \sqrt{\frac{c}{c_0} \left( \frac{c}{c_0} - 1 \right)} \right\} = \dot{c}_\infty \cdot t \quad (3)$$

eller

$$c_0 \cdot f\left(\frac{c}{c_0}\right) = \dot{c}_\infty \cdot t \quad (3')$$

där t är tiden från spricktillväxtens början.  
Funktionen  $f\left(\frac{c}{c_0}\right)$  är utritad i FIG 2.

Ur ekv (3) kan man beräkna tiden för att brott  
skall ske. Betrakta en cylindrisk provkropp med en  
cirkulär spricka utgående från provkroppspäriperien,  
FIG 3. Sprickans begynnelse-radie  $c_0$  är mycket liten

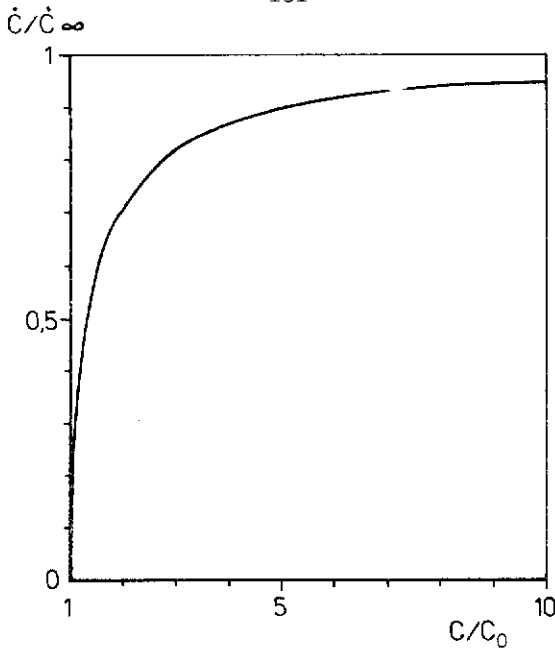


FIG 1. Relativ sprickutbredningshastighet som funktion av sprickvidden; ekv (2).

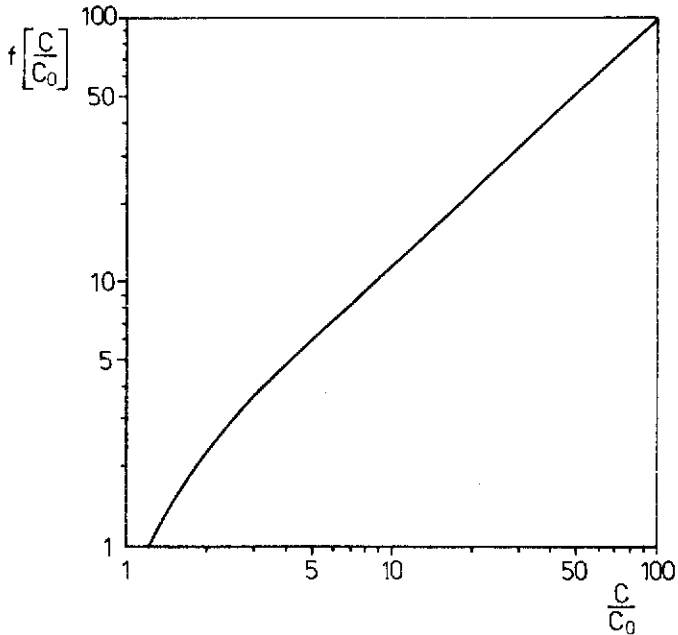


FIG 2. Funktionen  $f\left(\frac{C}{C_0}\right)$  i ekv (3).

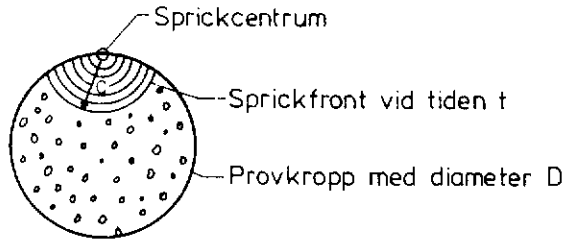


FIG 3. Sprickutbredning i en cylindrisk stav där initialsprickan finns vid periferien av staven.

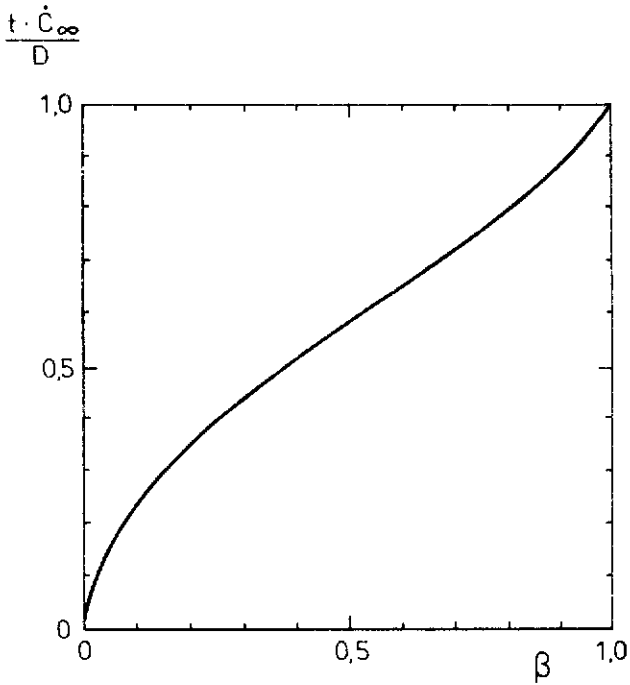


FIG 4. Samband mellan skadegraden  $\beta$  och total tid för spricktillväxt vid ett sprickutbredningsmönster enligt FIG 3.

i förhållande till provkroppsdiametern. Vid en viss tid  $t$  räknat från spricktillväxtens start har sprickan nått radien  $c$ . Andelen skadad tvärsnitts-yta är då

$$\beta = \frac{1}{4} \left[ 4 \left( \frac{c}{D} \right)^2 \arccos \left( \frac{c}{D} \right) + \arccos \left( 1 - 2 \left( \frac{c}{D} \right)^2 \right) - 2 \frac{c}{D} \sqrt{1 - \left( \frac{c}{D} \right)^2} \right] \quad (4)$$

Eftersom  $c$  mycket snart blir  $\gg c_0$  kan  $f\left(\frac{c}{c_0}\right)$  i ekv (3) ersättas med  $c/c_0$ . Genom insättning av ekv (4) i (3) fås ett samband mellan tiden  $t$  och skade-graden  $\beta$ . Detta samband har i dimensionslös form uttryckt i FIG 4.

Anta en betongcylinder med diametern 10 cm. Ljud-hastigheten är 4000 m/s.  $c_\infty$  är då 1500 m/s. Anta att totalt materialhaveri inträffar när 25% av tvärsnittet är sprucket. Ur FIG 4 fås då att para-metern  $\frac{t \cdot c_\infty}{D}$  är 0,39 dvs brottiden är 26  $\mu$ s. Redan mycket kortvariga belastningar borde sålunda med-föra brott för ett material där brottet förorsakas av sprickutbredning.

För ideellt spröda material borde alltså den statis-ka och den dynamiska hållfastheten vara i stort sett lika.

## 2.2 Steveding-Lehnigk's teori /3/ och implika-tioner av denna

Steveding och Lehnigk har teoretiskt behandlat villkoret för att en stötpuls skall samverka med en spricka. Betrakta en provstav med en ytspricka med djupet  $c$ . En fyrkantpuls fortplantar sig med hastigheten  $a$  längs staven. Pulsens amplitud är  $\sigma$  och dess längd  $\tau$ .

För att sprickan skall påverkas av stötvågen måste våglängden  $\lambda = a \cdot \tau$  åtminstone vara av samma storleks-ordning som sprickvidden  $c$ , dvs varaktigheten måste överskrida ett visst gränsvärde. Författarna härleder följande uttryck för detta villkor

$$\tau \geq \tau_{\min} = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/4} \cdot \frac{c}{a} = 1,1 \frac{c}{a} \quad (5)$$

dvs  $\lambda = 1,1 \cdot c$ . Vid mycket korta varaktigheter hos lasten kan därför inte sådana sprickor som är farliga vid statisk last, dvs de långa, aktiveras. För betong är  $a = 4000$  m/s dvs en spricka med längden 10 mm kan inte aktiveras med mindre pulsens längd är större än 2,8  $\mu$ s.

En fyrkantpuls är uppbyggd av ett oändligt antal sinusvågor som vardera har sin amplitud och varaktighet (våglängd). De enskilda komponenterna kan erhållas genom fourieranalis.

Varje fourierkomponent kommer att samverka med sin specifika spricka vars längd fås ur ekv (5). Största och minsta aktiverade sprickvidd är  $c_1$  och  $c_n$ .

Pulsens totala verkan  $Q$  kan uttryckas genom summan av ytan hos alla aktiverade sprickor dvs

$$Q = (c_1 - c_n) \cdot b \quad (6)$$

där  $b$  är sprickvidden vinkelrätt mot stavens längdriktning.

Insättning av uttrycket för största och minsta aktiverade spricka  $c_1$  resp  $c_n$  i ekv (6) ger ( $\gamma$  = materialets ytspänning)

$$Q = \left(\frac{2}{3}\right)^{1/4} \left[ a \cdot \tau - \frac{\gamma}{2\sigma} (E \cdot \gamma \cdot a \cdot \tau)^{1/2} \right] \cdot b \quad (7)$$

Största aktiverade sprickan beror enbart på stötens varaktighet medan den minsta aktiverade sprickan beror på såväl varaktighet som amplitud hos stötvågen. Ju kraftigare stöten är desto större sprickintervall aktiveras uppenbarligen. Även vid mycket kortvarig men kraftig stöt  $t$  ex av ballis-



tisk karaktär blir hållfastheten inte mycket högre än vid statisk belastning; visserligen aktiveras inte de längsta sprickorna p g a att stöten är för kort men däremot aktiveras även sprickor motsvarande de högre fourierkomponenterna varför pulsens verkan kan blir stor.

Vi är nu intresserade av den lägsta spänning vid vilken sprickutbredning överhuvud taget sker och definierar denna hållfasthet som dynamisk hållfasthet. Enligt analysen i avsnitt 2.1 är nämligen de belastningstider som är aktuella vid normala stötar (t ex påslagning) tillräckligt långa för att totalbrott skall ske genom utbredning av en enda spricka.

Känsligast för sprickutbredning är den största av alla aktiverade sprickor. I det generella fallet är emellertid enligt ovan den största spricka som aktiveras vid dynamisk last kortare än vid statisk last vid vilken det ju alltid är materialets allra längsta spricka som för till brott.

Författarna anger följande villkor för att en spricka skall kunna vandra under dynamisk last (bortsett från villkor (5)).

$$\sigma^* > \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^{3/4} \frac{2 \cdot E \cdot \gamma}{3 \cdot c}} \quad (8)$$

Men villkoret för instabil spricktillväxt vid statisk last är enligt Griffith.

$$\sigma_F \geq \sqrt{\frac{2E\gamma}{\pi \cdot c}} \quad (9)$$

Insättning i ekv (8) ger

$$\frac{\sigma^*}{\sigma_F} = 1,19 \sqrt{\frac{c_0}{c_0^*}} = 1,25 \sqrt{\frac{c_0}{a \cdot \tau}} \quad (10)$$

där  $c_0^*$  och  $c_0$  är längden hos största aktiverade spricka i de bägge fallen. Sista ledet i ekv (10) har erhållits genom insättning av  $c_0^*$  lika med längden hos största aktiverade spricka,  $c_1 = (2/3)^{1/4} \cdot a \cdot \tau$ . Ekv (10) är definierad för  $c_0^* < c_0$  och  $\frac{a\tau}{c_0} \leq 1,1$ .

Av ekv (10) framgår att den dynamiska hållfastheten är avsevärt mycket högre än den statiska om bara stötpulsens längd är tillräckligt kort. Vid alla stötpulser över en viss längd ( $\tau_c = 1,1 \cdot c_0/a$ ) är emellertid den dynamiska hållfastheten bara 19% högre än den statiska.

För en betong är de största sprickorna av storleksordningen 5 mm och  $a \approx 4000$  m/s dvs  $\tau_c \approx 1,3$  s. Belastningstiderna är avsevärt mycket större för de allra flesta typer av dynamisk belastning. Om man betraktar betong som ett ideellt sprött material skulle alltså den dynamiska hållfastheten vid de allra flesta belastningstyper vara  $\approx 19\%$  högre än den statiska. Vid mycket snabb engångsbelastning t ex projektilbeskjutning skulle dock hållfastheten vara högre eftersom de största sprickorna då inte hinner aktiveras.

### 2.3 Effekt av upprepad belastning

En intressant konsekvens av samverkan mellan spricklängd och sprickutbredningsspänning enligt ekv (8) är att ett material faktiskt kan bli hållfastare vid upprepad belastning av konstant längd om belastningstiden är liten.

Betrakta ett material med maximal sprickvidd  $c_0$ . Pulsens längd är  $\delta \cdot \tau_c$  där  $\tau_c$  är den kritiska pulslängd som aktiverar den längsta sprickan dvs  $\delta \cdot \tau_c = \delta \cdot 1,1 \cdot c_0/a$ . Sprickan  $c_0$  aktiveras därför om pulsens amplitud är  $(\sigma^*)_1$  enligt ekv (10) med

$(c_o^*)_1 = c_o$  dvs  $(\sigma^*)_1 = 1,19 \cdot \sigma_F$  där  $\sigma_F$  är den statistiska hållfastheten. Under den aktuella belastningstiden hinner sprickan växa till längden  $(c_o^*)_2 > c_o$ . Om  $\delta$  är tillräckligt stor blir  $(c_o^*)_2 = c_o + 0,38a \cdot \delta \cdot \tau_c$  enligt ekv (3).

Vid förnyad puls erfordras nu en mindre amplitud  $(\sigma^*)_2$  för att sprickan skall växa vidare. Villkoret för fortsatt spricktillväxt fås genom insättning av den nya spricklängden i ekv (10)

$$\frac{(\sigma^*)_2}{(\sigma^*)_1} = \sqrt{\frac{c_o}{c_o + 0,38 \cdot a \cdot \delta \cdot \tau_c}} = \sqrt{\frac{1}{1 + 0,42\delta}} \quad (11)$$

där alltså  $(\sigma^*)_1$  och  $(\sigma^*)_2$  är villkoren för spricktillväxt vid 1:a resp 2:a belastningspulsen och  $\delta$  uttrycker pulsens längd i multiplar av den kritiska längden för aktivering av längsta sprickan vid 1:a slaget.

Ekv (11) antyder nu att spricktillväxten sker vid en mindre amplitud vid 2:a slaget vilket också intuitivt verkar vara rimligt. Under speciella betingelser kan emellertid omvända förhållanden gälla; om  $\delta$  är tillräckligt litet kan sprickan ej längre aktiveras av den givna pulsen oavsett dennas styrka. Maximalvärdet för  $\delta$  för att detta fenomen skall inträffa fås ur ekv (5).

$$\delta \cdot \tau_c \leq \frac{1,1 \cdot (c_o^*)_2}{a} = \frac{1,1(c_o + 0,38 \cdot a \cdot \delta \cdot \tau_c)}{a} \quad (12)$$

eller

$$\delta \leq 1,72 \quad (13)$$

Hållfastheten vid den 2:a pulsen blir nu helt beroende av längden på den största av alla de sprickor som är så små att de kan aktiveras av pulsen. Om denna spricka är mycket mindre än den största kan hållfasthetshöjningen bli avsevärd.

Som tidigare visats är  $\tau_c$  normalt mycket litet. Pulsen får alltså vara högst 2,2  $\mu$ s lång för att hållfasthetshöjningen skall uppstå i en betong där största spricklängden är 5 mm ( $\tau_c=1,3 \mu$ s). Hållfasthetshöjningen är därför mycket osannolik i en betong. Även för andra material torde den enbart vara av teoretiskt intresse såvida inte spricklängderna är mycket stora och pulserna mycket korta. Sprickstorleksfördelningen är dessutom normalt så pass kontinuerlig att det alltid finns en spricka tillgänglig som aktiveras vid en spänning som enbart något överstiger  $(\sigma^*)_1$ .

I normalfallet ger därför ekv (11) den spänning som erfordras för att sprickan skall växa vidare. En generell ekvation för erforderlig spänning  $(\sigma^*)_n$  vid belastningspuls nr n i en kontinuerlig följd av pulser är

$$\frac{(\sigma^*)_n}{(\sigma^*)_1} = \sqrt{\frac{1}{1+(n-1) \cdot 0,42 \cdot \delta}} \quad (14)$$

Denna ekv har uttritats i FIG 5 för några värden på  $\delta$ . Som synes är hållfasthetsreduktionen störst mellan det 1:a och 2:a slaget, framförallt då vid höga värden på  $\delta$ .

Ekv (14) antyder en mycket stark utmattnings effekt vid stötbelastning.

#### 2.4 Effekt av sprickans placering i provstaven

Ekv (8) förutsätter att sprickan är en ytspricka enligt FIG 6. Anta nu att staven även har en inre spricka med längden 2 c. Denna spricka utbredds instabilt vid samma spänning  $\sigma$  som en ytspricka med längden c enligt ekv (9). Detta gäller emellertid ej vid dynamisk last vilket visats i /3/.

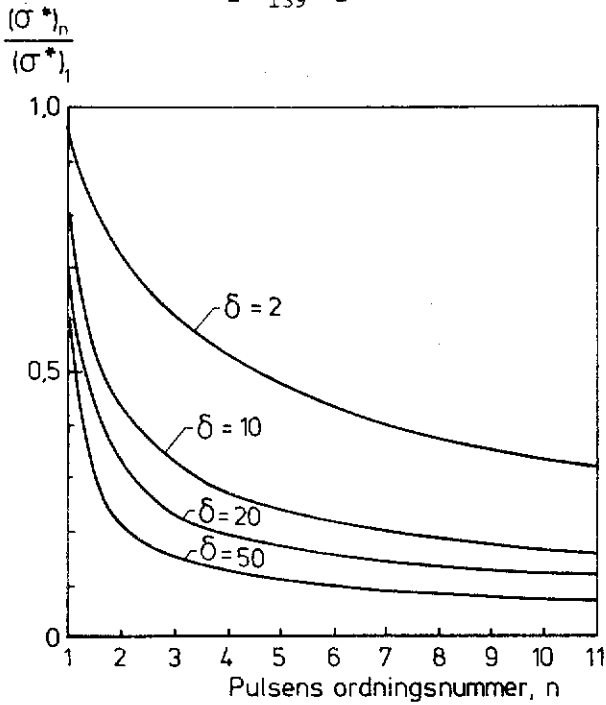


FIG 5. Lägsta erforderliga amplitud för att driva sprickutbredningen vidare som funktion av pulsens ordningsnummer; ekv (14)

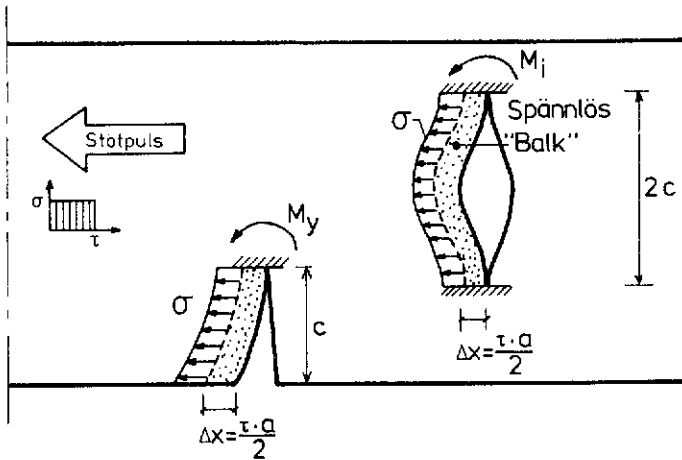


FIG 6. Provstav med ytspricka och inre spricka utsatt för en fyrkantpuls med amplituden  $\sigma$  och varaktigheten  $\tau$ .

När en dragpuls når den fria sprickranden totalreflekteras den som en tryckpuls med bibehållen amplitud. De båda vågorna - den primära dragvågen och den sekundära tryckvågen - överlagras varandra. Den resulterande spänningen blir därför noll inom ett visst område med längden  $\Delta x$  vid sprickranden.  $\Delta x$  beror på tiden  $t_r$  räknad från det primärvågens front reflekterades.  $\Delta x=0$  för  $t_r=0$  och för  $t_r=\tau$ . Maxvärdet för  $\Delta x=a\cdot\tau/2$  och uppnås vid  $t_r=\tau/2$ .

Denna spänningsfria zon fungerar nu som en fri balk med höjden  $\Delta x$  och bredden  $b$  som är sprickans vidd vinkelrätt mot figurens plan. Balken vid den inre sprickan är fast inspänd i bägge ändar och har längden  $2c$ . Den yttre balken är ensidigt inspänd med längden  $c$ .

Balkarna belastas med spänningen  $\sigma$  som är stöt-vågens amplitud.

Spänningskoncentrationerna i sprickändarna är proportionella mot böjmomenten i balkändarna dvs

$$\frac{\sigma_i}{\sigma_y} = \frac{M_i}{M_y} = \frac{\sigma \cdot b (2c)^2}{12} \cdot \frac{2}{\sigma \cdot b \cdot c^2} = \frac{2}{3} \quad (15)$$

där  $\sigma_i$  och  $\sigma_y$  är spänningskoncentrationerna vid inre och yttre sprickorna. Om inga yttre ytsprickor funnes skulle därför förhållandet mellan dynamisk och statisk last vid pulslängder större än  $\tau_c$  vara

$$\frac{\sigma^*}{\sigma_F} = \frac{3}{2} \cdot 1,19 = 1,79 \quad (16)$$

Man kan därav dra den slutsatsen att det framförallt är ytsprickor som är kritiska i samband med dynamisk belastning. Om ytsprickor kunde undvikas skulle avsevärda höjningar av den dynamiska hållfastheten uppnås.

### 3 BROTTVILLKOR FÖR VISKOELASTISKA MATERIAL VID DYNAMISK BELASTNING

#### 3.1 Allmänt

Nedan skall ett försök göras att förklara skillnaden i dynamisk hållfasthet mellan ett rent ideal-elastiskt material och viskoelastiska material. De olika materialtyperna beskrivs genom olika reologiska modeller; Hooke, Kelvin, Maxwell och Burgers Body. Slutligen tillämpas resonemanget på kända data för cementpastas reologiska egenskaper.

Utgångspunkten är en energibetraktelse för en vandrande spricka. Resultatet av en sådan ger ekv (1) som i generell form kan skrivas

$$\dot{c} = \dot{c}_\infty \left[ 1 - \frac{2\gamma}{\pi} \cdot \frac{1}{\sigma \cdot \epsilon} \cdot \frac{1}{c} \right]^{1/2} \quad (17)$$

där  $\gamma$  är materialets ytspänning. I  $\gamma$  inkluderas även eventuella plastiska deformationer vid sprickspetsen.

Olika reologiska modeller ger olika konstitutiva samband mellan  $\sigma$  och  $\epsilon$ . Genom insättning av dessa och genom användning av uttryck (9) som ger hållfastheten vid statisk last kan den dynamiska hållfastheten utvärderas.

Belastningspulsen antas i fortsättningen vara fyrkantig med amplituden  $\sigma$  och varaktigheten  $\tau$ .

Även andra typer av pulser går att behandla på i princip samma sätt. Så t ex, kan den triangulära puls som alltid uppstår när toppspänningen gradvis byggs upp, behandlas. Ekvationerna blir mera komplicerade men huvudresultatet blir i stort sett detsamma; de viskoelastiska materialen får en större hållfasthetsökning vid dynamisk last än de spröda materialen.

### 3.2 Hooke-material

För Hooke-materialet gäller följande konstitutiva samband

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (18)$$

Ekv (17) övergår då till ekv (1) och lösningen fås ur FIG 1 och 2.

Hooke-materialets hållfasthet blir lika med den statistiska utom vid mycket kortvariga enstaka stötar, jfr avsnitt 2.2 och 2.3.

### 3.3 Kelvin-material

Kelvin-materialets deformationskaraktistika åskådliggörs i FIG 7.

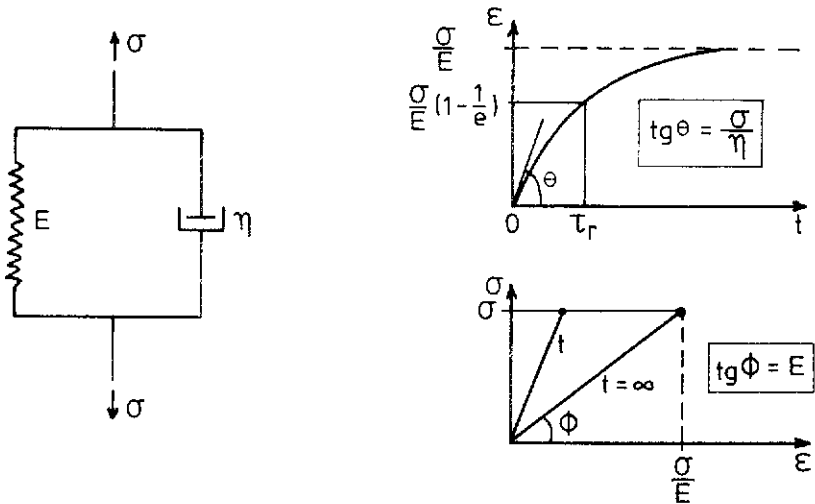


FIG 7. Kelvin-material och dess deformationskaraktistika.



Det konstitutiva sambandet kan skrivas

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} [1 - e^{-\tau \cdot E/\eta}] \quad (19)$$

där faktorn  $\eta/E$  utgör den s k retardationstiden eller tidskonstanten  $\tau_r$  för materialet dvs den tid vid vilken  $(1-1/e)$  av den totala töjningen vid pålastning uppnåtts.

Ekv (9) gäller för statisk hållfasthet varvid E i ekv (9) motsvarar E i ekv (19). Insättning i Ekv (17) ger

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}_F \left[ 1 - \frac{\sigma_F}{\sigma} \cdot \frac{1}{1 - e^{-t/\tau_r}} \cdot \frac{c_0}{c} \right]^{1/2} \quad (20)$$

Uttrycket under rottecknet måste vara  $\geq 1$  för att spricktillväxt skall ske dvs

$$\frac{\sigma}{\sigma_F} \geq \left[ \frac{1}{1 - e^{-t/\tau_r}} \cdot \frac{c_0}{c} \right]^{1/2} \quad (21)$$

Maxvärdet för  $\sigma/\sigma_F$  inträffar när  $c_0/c=1$  dvs vid starten för spricktillväxten. Därför fås följande uttryck för den dynamiska hållfastheten hos ett Kelvin-material som funktion av stötpulsens varaktighet  $\tau$ .

$$\boxed{\frac{\sigma_K^*}{\sigma_F} = \left[ \frac{1}{1 - e^{-\tau/\tau_r}} \right]^{1/2}} \quad (22)$$

där  $\sigma_K^*$  är Kelvin-materialets dynamiska hållfasthet. Vid  $\tau/\tau_r = \infty$  övergår ekv (22) till (1) och  $\sigma_K^* = \sigma_F$ . Vid  $\tau/\tau_r = 0$  blir  $\sigma_K^* = \infty$ . Ekv (22) är utritad i FIG 8.

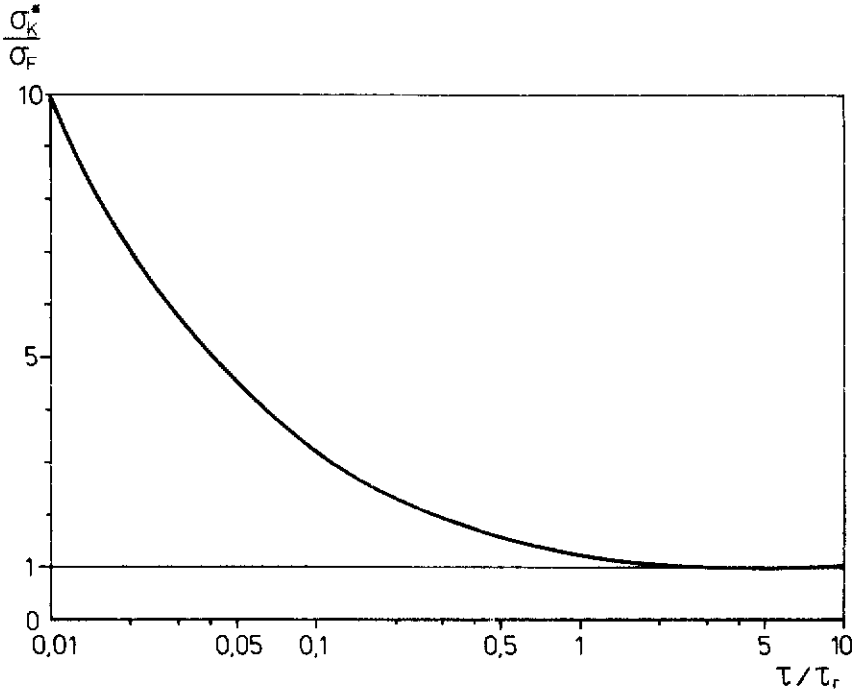


FIG 8. Förhållandet mellan dynamisk och statisk hållfasthet hos ett Kelvin-material; Ekv (22).

Ekv (22) kan tolkas på så sätt att det erfordras ett visst energiinnehåll hos pulsen för att sprickan skall börja vandra. Denna energi kan

antingen åstadkommas genom en lång stöttid och låg spänning eller genom en kort stöttid och hög spänning.

Lösningen till ekv (20) har uttritats i FIG 9. Det är intressant att notera, att när sprickan väl har börjat vandra vid ett visst tröskelvärde på pulsens längd  $\tau$  dvs vid en viss yttre spänning  $\sigma$  så växer den långsamt till en början. Vid långa tider gäller emellertid vid samtliga spänningsnivåer att

$$\frac{c_0}{\tau_r \cdot \dot{c}_\infty} \cdot \frac{c}{c_0} = \frac{t}{\tau_r} \quad (23)$$

eller

$$c = \dot{c}_\infty \cdot t \quad (24)$$

Men detta är samma uttryck som gäller för ett Hooke-element vid långa belastningstider.

Sprickan kan emellertid inte vandra under obegränsad tid; tidsintervallet för spricktillväxt kan bedömas med ledning av följande resonemang: spricktillväxten påbörjas definitionsmässigt när stöten avslutas dvs när  $t = \tau$ . I detta ögonblick har en erforderlig energinivå för spricktillväxt byggts upp i materialet. Men i samma ögonblick försvinner den yttre spänningen  $\sigma$ . Vore nu materialet helt elastiskt skulle även spricktillväxten avstanna momentant. I det viskösa materialet kvarstår emellertid en inre spänning under en viss tid. Denna spänning är upplagd i fjädern i FIG 7. Reduktionen av den inre spänningen fås ur

$$\sigma_t = \sigma_\tau \cdot e^{-\frac{t}{\tau_r}} \quad (25)$$

där  $\sigma_t$  är spänningen vid tiden  $t$  från belastningens påförande och  $\sigma_\tau$  är toppvärdet av påkänning vilket uppnås vid stötens slut dvs när  $t = \tau$ .

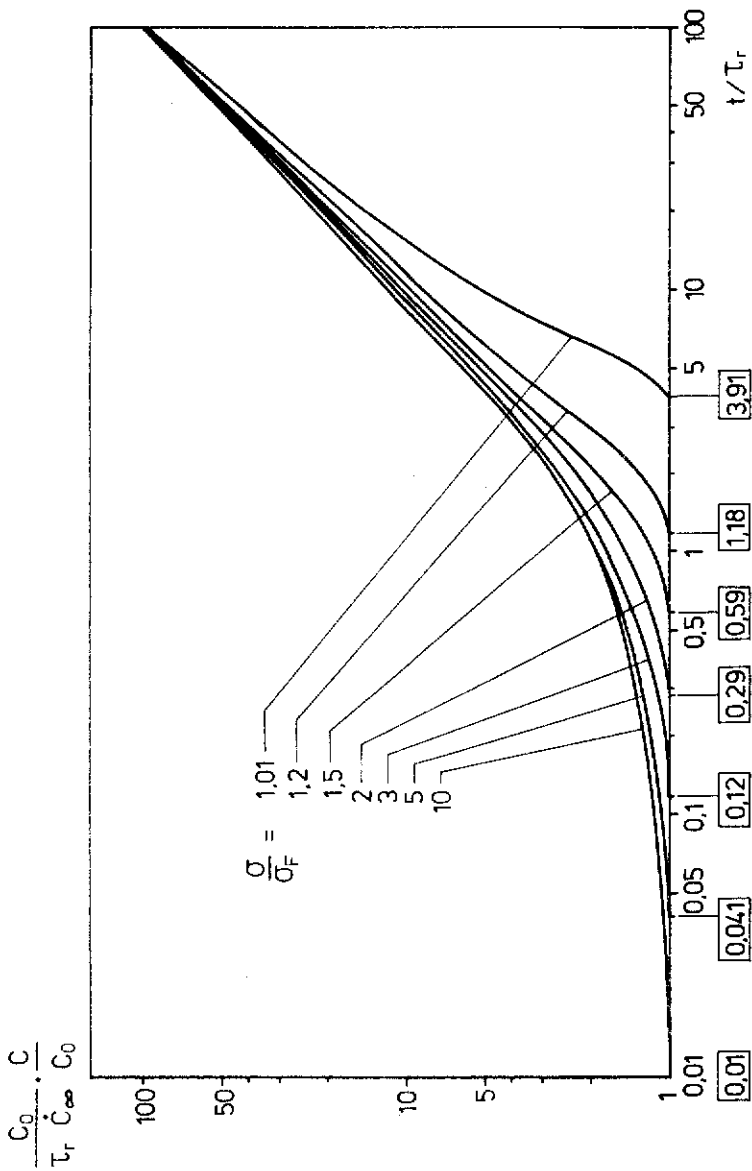


FIG 9. Sprickutbredning hos ett Kelvin-material.

$\sigma_\tau$  fås som  $\sigma_K^*$  ur ekv (22). Under förutsättning av att spricktillväxten avstannar när spänningen  $\sigma_t$  sjunkit till  $\sigma_F$  fås följande tid vid vilken spricktillväxten avstannar

$$\frac{t_F}{\tau} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau_r}{\tau} \ln \left[ \frac{1}{1 - e^{-\tau/\tau_r}} \right] + 1 \quad (26)$$

Den vänstra termen i högra ledet utgör alltså den tid under vilken spricktillväxt sker. Ekv (26) är utritad i FIG 10. Som synes är den relativa varaktigheten av spricktillväxt större ju mindre förhållandet  $\tau/\tau_r$  är; vid  $\tau/\tau_r=0,01$  breder sprickan ut sig under en tid som är 230 gånger pulsens längd

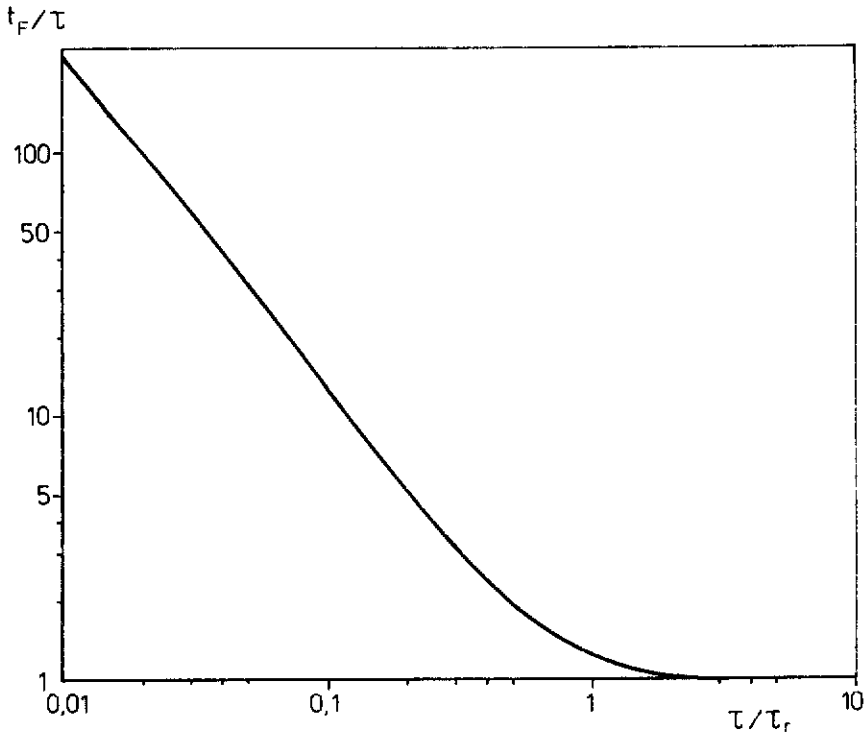


FIG 10. Tidpunkt vid vilken spricktillväxten avstannar i ett Kelvin-material: ekv (26).

medan motsvarande värde vid  $\tau/\tau_r=1$  enbart är 0,2. Den absoluta spricktillväxtens storlek blir därför ungefär lika stor oberoende av sprickans längd; ju lägre värdet på  $\tau/\tau_r$  är desto långsammare accelererar nämligen sprickan enligt FIG 9.

Lösningen i FIG 9 kan f ö inte användas direkt eftersom den förutsätter konstant spänning medan i själva verket spänningen avtar hela tiden under propageringsskedet. FIG 9 ger dock en övre begränsning för spricktillväxt. För  $\tau/\tau_r=0,01$  fås således ur FIG 9 att spricktillväxten  $c/c_0 < 3$ . Detta värde skall jämföras med den mycket stora spricktillväxten hos spröda material.

### 3.4 Maxwell-material

Maxwell-materialets deformationskaraktäristika åskådliggörs i FIG 11. Det konstitutiva sambandet kan skrivas

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma \cdot t}{\eta} \quad (27)$$

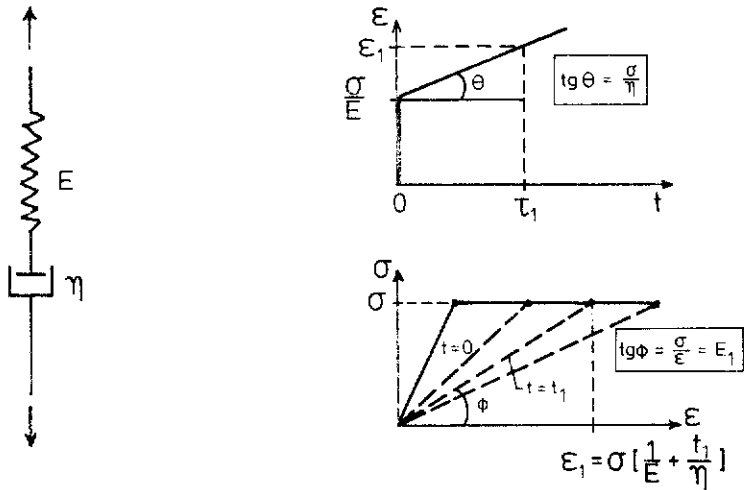


FIG 11. Maxwell-material och dess deformationskaraktäristika.

E i ekv (9) kan i detta fall inte direkt jämföras med E i ekv (27); en statisk belastning tar nämligen en viss tid att genomföra. E i ekv (9) skall därför motsvara den  $E_1$  i Maxwell-materialet som uttrycker deformationen vid den tid  $\tau_1$  som gäller i det statiska fallet. Följande samband gäller

$$E = E_1 \cdot \frac{\eta}{\eta - E_1 \cdot \tau_1} \quad (28)$$

Insättning av ekv (27) och (28) i (17) ger följande villkor för sprickutbredningen i ett Maxwell-material

$$\dot{c} = \dot{c}_\infty \left\{ 1 - \left( \frac{\sigma_F}{\sigma} \right)^2 \cdot \frac{1 + \frac{\tau_1}{\tau_R}}{1 + \frac{\tau}{\tau_R}} \cdot \frac{c_0}{c} \right\}^{1/2} \quad (29)$$

där  $\tau_1$  är belastningstiden vid det statiska prov vid vilket den statiska hållfastheten  $\sigma_F$  bestämdes.  $\tau_R$  är Maxwell-materialets relaxations-tid  $\eta/E$ .

Villkoret att rotuttrycket alltid skall vara  $> 0$  ger då följande dynamiska hållfasthet  $\sigma_M^*$  hos ett Maxwell-material för en stötpuls med varaktigheten  $\tau$

$$\frac{\sigma_M^*}{\sigma_F} = \left[ \frac{1 + \tau_1/\tau_R}{1 + \tau/\tau_R} \right]^{1/2} \quad (30)$$

Uttrycket är naturligtvis begränsat till  $\tau \leq \tau_1$ . Vid  $\tau = \tau_1$  erhålls det statiska belastningsfallet och  $\sigma_M^* = \sigma_F$ .

OBS:  $\sigma_M^*/\sigma_F \rightarrow 1$  när  $\tau/\tau_R \rightarrow \infty$  och  $\tau_1/\tau_R \rightarrow \infty$  dvs när materialet blir alltmera momentanelastiskt.

Ekv (30) är utritad i FIG 12. I likhet med vad som är fallet med Kelvin-materialet fås en avsevärd höjning av hållfastheten vid ökande relaxations-

tider. Denna höjning gäller även i detta fall för upprepade belastningscykler.

Maxwell-materialet avlastas momentant när stötpulsen försvinner. Därför kommer teoretiskt sett aldrig någon sprickutbredning att ske vid  $\sigma_M^*$ .

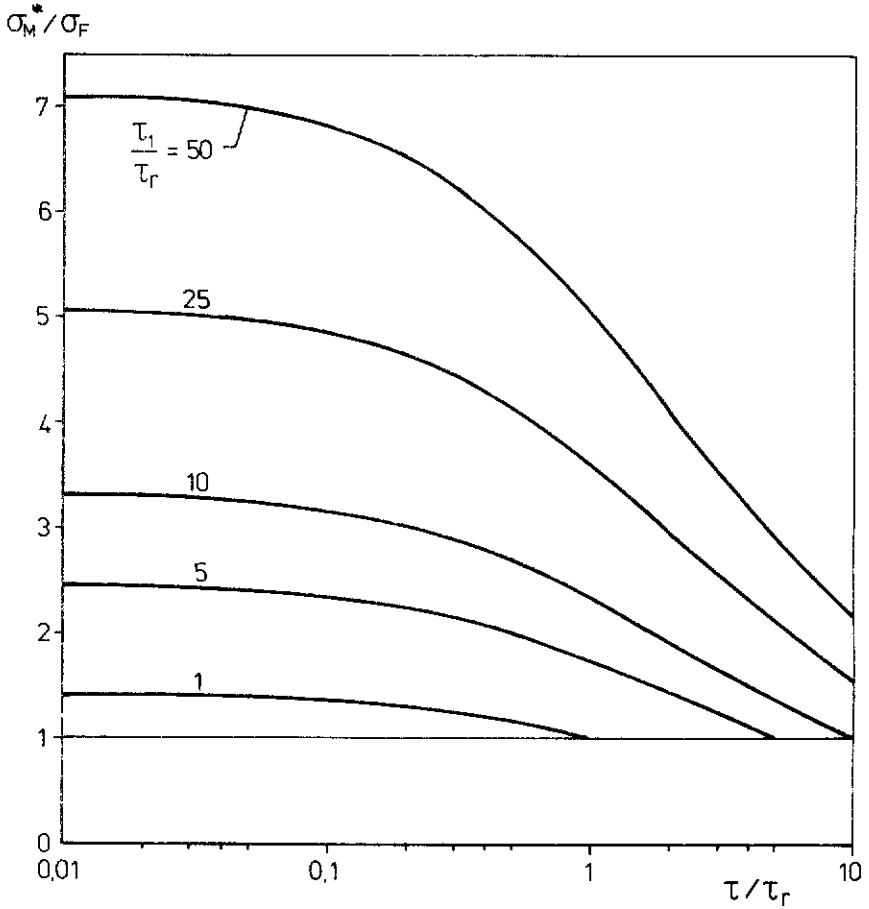


FIG 12. Förhållandet mellan dynamisk och statisk hållfasthet hos ett Maxwell-material; ekv (30).



### 3.5 Burgers-Body-material

Burger-Body-materialets deformationskaraktistika framgår av FIG 13. Det konstitutiva sambandet lyder

$$\varepsilon = \sigma \left[ \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} (1 - e^{-t \cdot E_2 / \eta_2}) + \frac{t}{\eta_1} \right] \quad (31)$$

Materialet har två relaxationstider  $\tau_{r1} = \eta_1 / E_1$  och  $\tau_{r2} = \eta_2 / E_2$ . Genom insättning av ekv (31) i ekv (17) fås följande spricktillväxthastighet vid dynamiska förhållanden

$$\dot{c} = \dot{c}_\omega [1 - \phi]^{1/2} \quad (32)$$

där följande samband gäller för  $\phi$  när belastningstiden vid det statiska belastningsförsöket är  $\tau_1$

$$\phi = \left( \frac{\sigma_F}{\sigma} \right)^2 \cdot \frac{c_0}{c} \cdot \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} (1 - e^{-\tau_1 / \tau_{r2}}) + \frac{\tau_1}{\eta_1}}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} (1 - e^{-t / \tau_{r2}}) + \frac{t}{\eta_1}} \quad (33)$$

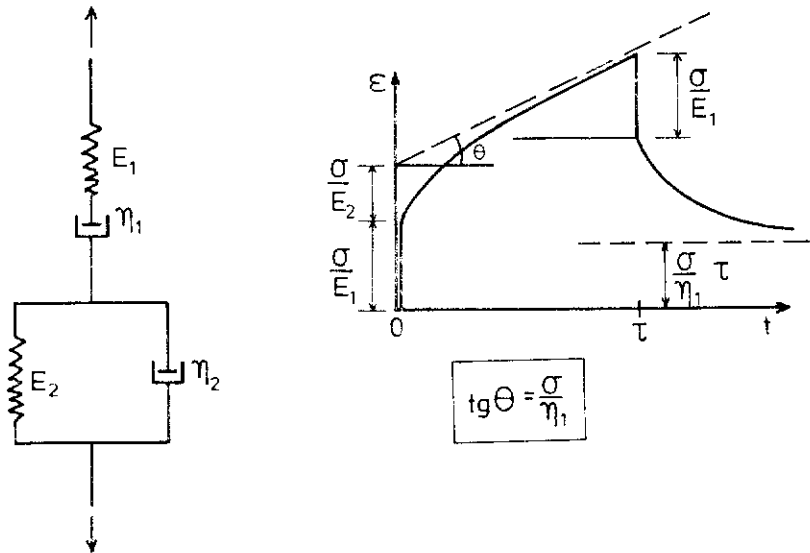


FIG 13. Burgers-Body-material och dess deformationskaraktistika.

Villkoret  $\phi < 1$  ger då följande värde för den dynamiska hållfastheten hos Burgers-Body-materialet,  $\sigma_{BB}^*$ .

$$\frac{\sigma_{BB}^*}{\sigma_F} = \left[ \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} (1 - e^{-\tau_1/\tau_{r2}}) + \frac{\tau_1}{\eta_1}}{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} (1 - e^{-\tau/\tau_{r2}}) + \frac{\tau}{\eta_1}} \right]^{1/2} \quad (34)$$

där  $\tau$  är stötpulsens längd.

För Kelvin-materialet är  $E_1 = \eta_1 = \infty$  och  $\tau_1 \gg \tau_{r2}$  varvid ekv (34) övergår till ekv (22). För Maxwell-materialet är  $E_2$  och  $\eta_2 = \infty$  varvid ekv (34) övergår till ekv (30).

Vi inför de båda dimensionslösa parametrarna  $\alpha = E_1/E_2$  och  $\beta = \tau_{r1}/\tau_{r2}$ . Ekv (34) kan då skrivas

$$\frac{\sigma_{BB}^*}{\sigma_F} = \left[ \frac{1 + \alpha (1 - e^{-\beta \cdot \tau_1/\tau_{r1}}) + \frac{\tau_1}{\tau_{r1}}}{1 + \alpha (1 - e^{-\beta \cdot \tau/\tau_{r1}}) + \frac{\tau}{\tau_{r1}}} \right]^{1/2} \quad (35)$$

Lösningen blir beroende av valet på parametrarna  $\alpha$  och  $\beta$ . Som exempel anges i FIG 14, lösningen för  $\alpha = \beta = 1$  dvs för ett element där E-moduler och viskositetskoefficienter är parvis lika.

En jämförelse med FIG 12 visar att man vid samma  $\tau_1/\tau_{r1}$  hos "Maxwell-delen" av materialet får något högre dynamisk hållfasthet hos Burger-Body-materialet vid korta stöttider. Detta förklaras av inverkan av "Kelvin-delen"

I likhet med vad som var fallet för det rena Maxwell-materialet närmar sig den dynamiska håll-

fastheten hos Burger-Body-materialet snabbt ett gränsvärde varför effekten av en förkortning av belastningspulsen blir liten när väl en viss kortvarighet nåtts. För det rena Kelvin-materialet å andra sidan växer hållfastheten progressivt med sänkt varaktighet hos belastningen, se FIG 8.

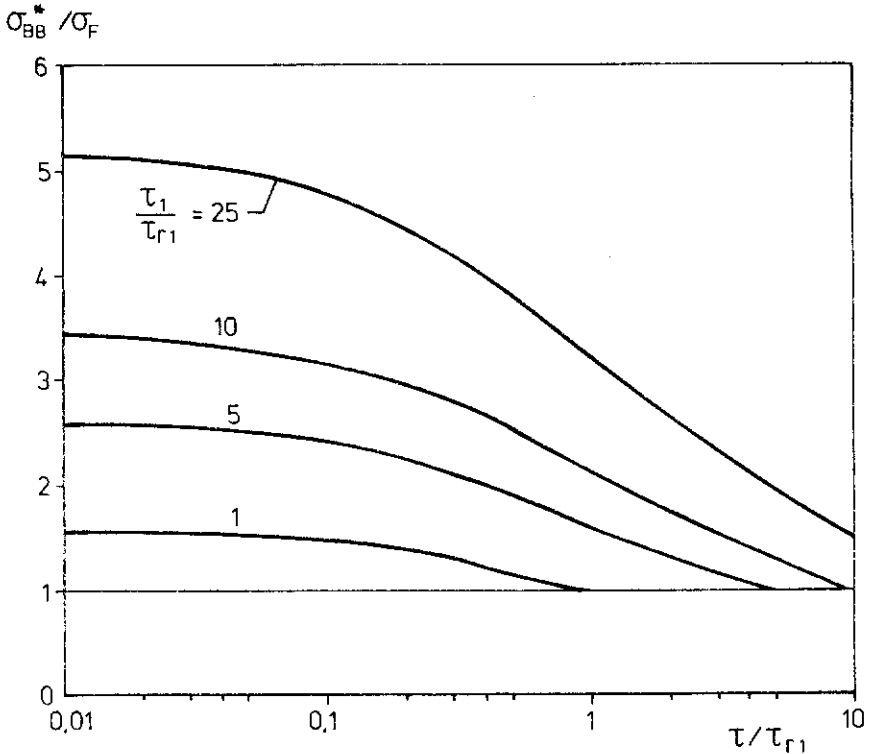


FIG 14. Förhållandet mellan dynamisk och statisk hållfasthet hos ett Burgers-Body-material; ekv (35).

Sprickutbredningstiden bestäms enligt samma resonemang som för Kelvin-materialet. Maxwell-delen av elementet avlastas momentant när den yttre belastningen försvinner vid tiden  $t = \tau$ . Kelvin-delen relaxerar enligt ovan. Den inre spänningen i materialet faller därför enligt (se ekv(25))

$$\sigma_t = \sigma_r \cdot e^{-\frac{1}{\tau r^2} (\tau - t)} \quad (36)$$

där  $\sigma_r$  fås som  $\sigma_{BB}^*$  ur ekv (35). Om sprickutbredningen avtar när den inre spänningen sjunkit till  $\sigma_F$ , som är den statiska hållfastheten, gäller följande uttryck för den tid  $t_F$  vid vilken spricktillväxten avstannar; jfr ekv (26).

$$\frac{t_F}{\tau} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\tau r^2}{\tau} \ln \left[ \frac{\sigma_{BB}^*}{\sigma_F} \right]^2 + 1 \quad (37)$$

där  $\sigma_{BB}^*/\sigma_F$  fås ur ekv (35).

Sprickutbredningstiden avgörs således av Kelvin-delen bortsett från att Maxwell-delen påverkar värdet på  $\sigma_{BB}^*$ .

### 3.6 Sammanfattning av punkter 3.2 till 3.5

Analysen ovan visar i samtliga fall en förhöjd dynamisk hållfasthet hos material, som har viss plastisk och viskös töjningsförmåga jämfört med ideellt spröda material. Höjningen, som kan vara avsevärd, gäller även vid upprepad belastning.

Analysen visar dessutom att sprickutbredningen vid en viss belastningspuls är mindre i ett viskoelastiskt material än i ett sprött material.

### 3.7 Tillämpning på cementpasta

I /4/ har publicerats vissa data över retardationstider hos cementpasta som kan användas åtminstone för en kvalitativ bedömning av relationen mellan dynamisk och statisk hållfasthet med hjälp av de formler som härletts ovan.

Författarna har studerat återhämtningen vid mycket korta tider hos tidigare böjda strimlor av cementpasta som lagrats och härdats på olika sätt. Variationer har även gjorts i temperatur och fuktinnehåll.

Utgångspunkten är följande konstitutiva samband

$$\frac{\varepsilon(t)}{\sigma} = \frac{1}{\sigma} \{ \varepsilon(0) + [\varepsilon(\infty) - \varepsilon(0)] \psi(t) \} \quad (38)$$

där  $\varepsilon(t)$ ,  $\varepsilon(0)$  och  $\varepsilon(\infty)$  är den aktuella deformationen vid tiden  $t$ , den momentana deformationen vid tiden  $t=0$  och den totala deformationen vid oändligt lång tid,  $\psi(t)$  är krypfunktionen som är 0 vid  $t=0$  och 1 vid  $t=\infty$ . Den högra termen i högra ledet utgör således kryppningens bidrag till deformationen.

Funktionen  $\psi(t)$  är ett uttryck för materialets viskösa egenskaper. För analysen av utseendet på  $\psi(t)$  ur försöksdata använde författarna en teknik som anvisats i /5/. Man antar att de viskösa deformationerna bestäms av ett oändligt antal seriekopplade Kelvin-element vart och ett karakteriserat av sin retardationstid  $\tau_r$ . Man erhåller således ett kontinuerligt "retardationstidsspektrum". Man antar att fördelningen är log-normal dvs att den karakteriseras av följande funktion  $L(Z)$

$$L(Z) = \frac{1}{\beta\sqrt{\pi}} \cdot e^{-Z^2/\beta^2} \quad (39)$$

där  $\beta$  är ett mått på fördelningsbredden och  $Z$  definieras av

$$Z = \ln\left(\frac{\tau_r}{\bar{\tau}_r}\right) \quad (40)$$

där  $\bar{\tau}_r$  är retardationstidernas medelvärde. I /5/ anges en metod för utvärdering av  $\bar{\tau}_r$  och  $\beta$  ur försöksdata. Ett exempel på en sådan analys för vattenmättad anghärdad cementpasta visas i FIG 15 ur /4/.

Analysen utvisar två distinkt olika spektra; ett som gäller för korta tider,  $t < 10s$  och ett som

gäller för långa tider  $10s < t < \infty$ . Korttidsspektrumet har en topp vid  $\approx 1$  s medan långtidsspektrumet inte nått sin topp ens efter 10 000 s dvs 3 tim.

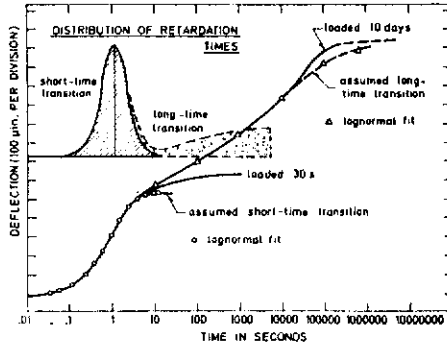


FIG 15. Återhämtning hos ånghärdad vattenmättad cementpasta samt därav beräknade retardationstidsspektra /4/.

Den första toppen härleds till inverkan av kapillär-kondenserat vatten. Redan vid en måttlig uttorkning reduceras nämligen återhämtningen under de första sekunderna avsevärt. Uttorkningen av det adsorberade vattnet medförde betydligt mindre effekt på återhämtningen.

Vid torrt material återstår så gott som ingen återhämtning vid korta tider. Materialet kan betraktas som helt linjärelastiskt och sprött vid belastningstider som är  $< 10$  s.

En höjd temperatur minskade värdet på  $\bar{\tau}_r$  dvs kryp-funktionen  $\psi(t)$  förskjuts mot kortare tider.

Ekv (38) är ingenting annat än deformationsegenskaperna hos en Burgers Body med relaxationstiden  $\tau_{r1} = \infty$ . Detta innebär att  $\epsilon(0)/\sigma = 1/E_1$  och  $[\epsilon(\infty) - \epsilon(0)]/\sigma = 1/E_2$  i Burgers-Body-modellen; se FIG 13.

Förhållandet mellan dynamisk och statisk hållfasthet  $\sigma^*/\sigma_F$  kan då beskrivas med en modifierad ekv (35).

$$\frac{\sigma^*}{\sigma_F} = \left[ \frac{\epsilon(0) + [\epsilon(\infty) - \epsilon(0)] (1 - e^{-\tau_1/\tau_{r2}})^{1/2}}{\epsilon(0) + [\epsilon(\infty) - \epsilon(0)] (1 - e^{-\tau/\tau_{r2}})} \right] \quad (41)$$

där  $\tau_1$  är belastningstiden vid ett statiskt försök, där  $\tau_{r2}$  är retardationstiden och där  $\tau$  är stötpulsens längd.

$\tau_{r2}$  sätts lika med retardationstidernas medelvärde  $\bar{\tau}_r$ .  $\tau_1$  sätts lika med 60 s vilket motsvarar en spänningsökning av 1 MPa/s vid en hållfasthet av 60 MPa.

Vid stort förhållande  $\tau_1/\tau_{r2}$  och litet förhållande  $\tau/\tau_{r2}$  dvs vid retardationstider som är avsevärt mindre än den statiska belastningstiden men avsevärt större än stöttiderna övergår ekv (41) till

$$\frac{\sigma^*}{\sigma_F} = \left[ 1 + \frac{\epsilon(\infty) - \epsilon(0)}{\epsilon(0)} \right]^{1/2} = \left[ 1 + \frac{\epsilon_{KR}}{\epsilon_{MOM}} \right]^{1/2} \quad (42)$$

där  $\epsilon_{KR}$  är krypdeformationen vid en belastningstid av  $\tau_1$  och  $\epsilon_{MOM}$  är momentandeformationen.

I /4/ anges vissa data över  $\beta$  och  $\bar{\tau}_r$  vilka gör det möjligt att beräkna relationer mellan statisk och dynamisk hållfasthet hos värmehärdade cementpaster med ekv (41). Dessa data redovisas i TABELL 1 tillsammans med resultat av beräkningen.

TABELL 1. Beräkning av relationen mellan dynamisk och statisk hållfasthet för värmehärdade cementpaster. Reologiska data från /4/.

provkr. litt	vct	temp	$\bar{\tau}_r =$ $\tau_{r2}$	$\beta$	$\frac{1}{E_1}$	$\frac{1}{E_2}$	$\sigma^*/\sigma_F$ vid	
							$\tau=10\mu s$	$\tau=0,1s$
80	0,35	25	3,15	1,20	16,58	1,26	1,037	1,036
91c	0,35	24,8	1,24	1,00	16,54	1,29	1,038	1,035
110	0,40	25,4	1,16	0,90	21,88	1,75	1,040	1,036
107	0,45	25,8	0,84	0,20	25,64	2,00	1,038	1,034

Enligt tabellen skulle alltså den dynamiska hållfastheten hos vattennäddad cementpasta vara ungefär 4% högre än den statiska hållfastheten. Man måste då observera att belastningen vid återhämtningsförsöket i /4/ var < 25% av brotthållfastheten.

Krypningen ökar emellertid mer än linjärt med ökande belastning. Enligt /8/ gäller följande samband mellan tryckkrypning vid en viss tid och den pålagda spänningen i  $kp/cm^2$ .

$$\epsilon_{KR} = a \cdot t^n \cdot \sinh(b \cdot \sigma) \quad (43)$$

där t är tiden och a, b och n är konstanter;  $a \approx 0,091$ ,  $n \approx 0,33$  och  $b \approx 0,0047$  för en cementpasta med vct = 0,30 belastad vid 28 dygns ålder. Tryckhållfastheten hos denna pasta är  $\approx 800 kp/cm^2$ . Om vi nu antar att böjdragkrypningen är proportionell mot tryckkrypningen skulle alltså faktorn  $1/E_2$  i TAB 1 multipliceras med faktorn  $0,25 \sinh(0,0047 \cdot 800) / \sinh(0,0047 \cdot 0,25 \cdot 800) = 4,9$  för att motsvara krypdeformationen vid brottlasten. Faktorn  $1/E_1$  är dock oförändrad. Detta innebär att förhållandet  $\sigma^*/\sigma_F$  ökar och blir i medeltal 1,17 för de fyra cementpastorna i TAB 1. Den dynamiska hållfastheten hos vattennäddade pastor skulle således vara  $\approx 17\%$  högre än den statiska hållfastheten.



För torra pastor saknas krypdeformationer så gott som helt vid korta belastningar varför den statiska och den dynamiska hållfastheten bör vara lika. Enligt Grudemo /6/ är den statiska hållfastheten för torr cementpasta betydligt större än för vattenmättad pasta. Denna relation är 1,6-1,8 för tryckhållfasthet och 1,8-2,6 för draghållfasthet vid vct = 0,32-0,45. Den statiska hållfastheten hos torr cementpasta kommer därför ändå att vara något större än den dynamiska hållfastheten för vattenmättad pasta.

#### 4 EXPERIMENTELLA MÄTNINGAR AV SLAGHÅLLFASTHET HOS BETONG

CBI bedriver i samarbete med TEKNIKUM vid Uppsala Universitet en omfattande undersökning av slaghållfasthet hos betong.<sup>1)</sup> I undersökningen studeras bl a inverkan av betongsammansättningen på slaghållfastheten, inverkan av stötpulsens längd, inverkan av upprepade belastning etc. En rapport kommer att publiceras i början av år 1978.

Apparaturen är en modifierad s k Hopkinson Split Bar. Denna har beskrivits i /7/. En enkel skiss visas i FIG 16. Apparaturen har utvecklats vid TEKNIKUM.

Provkropparna utsätts för en stötpuls som är någorlunda fyrkantig och med en varaktighet av  $\approx 0,1$  ms eller 0,2 ms. Ett exempel på en puls visas i FIG 17.

---

1) Se TILLKÄNNAGIVANDE i slutet av rapporten.

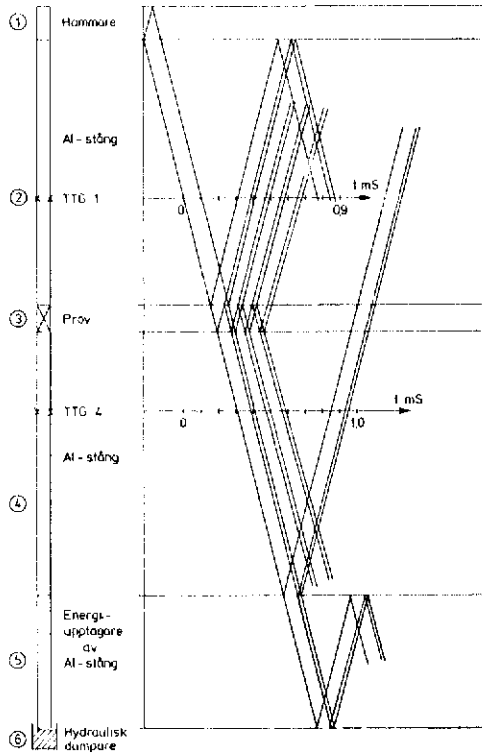


FIG 16. Hopkinson Split Bar apparat för bestämning av dynamisk hållfasthet /7/.

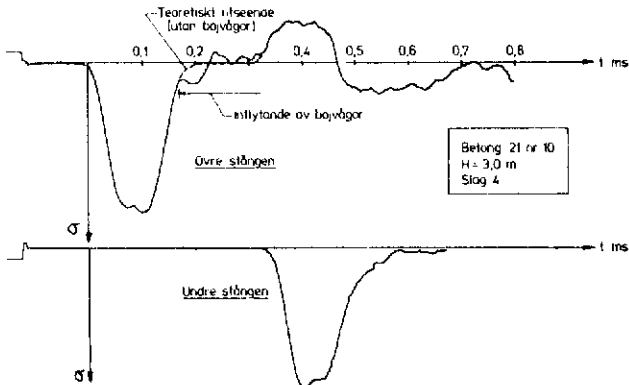


FIG 17. Exempel på en stötpuls i Hopkinson Split Bar apparaten.

Slaghållfastheten definieras som den maximala spänning som provkroppen förmår transportera över hela sin längd. Denna varierar starkt med antalet pulser.

I FIG 18 visas sambandet mellan den dynamiska hållfastheten och den statiska hållfastheten för ett antal olika blandningar. I stort sett gäller följande relation för hållfastheten vid en enda belastningspuls (hållf i MPa)

$$\frac{\sigma_1^*}{\sigma_F} = 1 + \frac{17}{\sigma_F} \quad (\sigma_F \text{ är cylinderhållfasthet}) \quad (44)$$

Den dynamiska hållfastheten är således något större än den statiska. Effekten av snabb belastning är emellertid inte så stor som för mjuka metaller. Vid statisk cylinderhållfasthet 40, 50, 60 eller 70 MPa blir förhållandet mellan dynamisk och statisk hållfasthet 1,42, 1,34, 1,28 och 1,24.

Utmattningseffekten vid upprepad puls är stor. Några exempel visas i FIG 19. Extrapoleras linjen skulle nollhållfasthet nås efter ungefär 6000 slag. Redan efter ett relativt litet antal slag skär utmattningsskurvan för stötbelastning motsvarande kurva vid "normal utmattning".

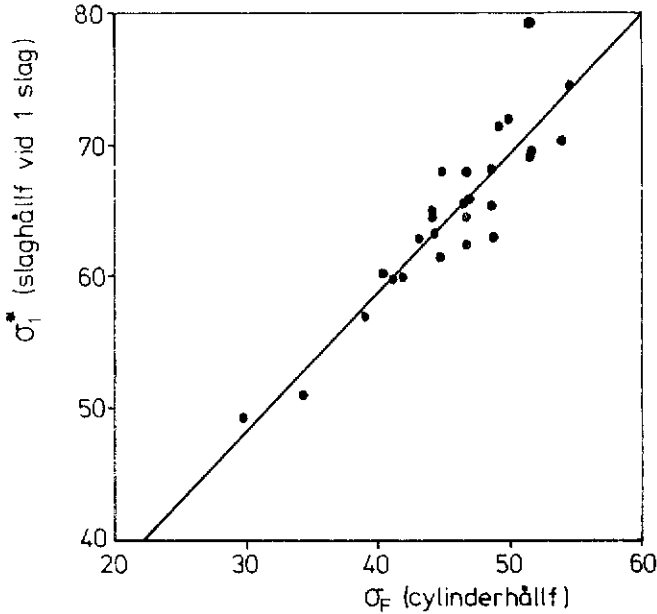


FIG 18. Samband mellan dynamisk hållfasthet  $\sigma_1^*$  och statisk hållfasthet hos prover av betong med testade Hopkinson Split Bar apparat.

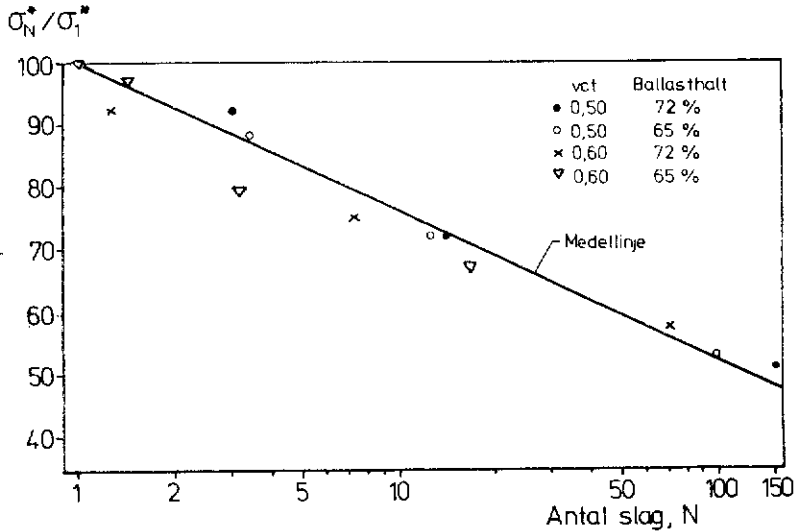


FIG 19. Utmattningshållfastheten vid slagbelastning av fyra olika betongtyper. Testning med apparat i FIG 15.

#### TILLKÄNNAGIVANDE

Föreliggande arbete har initierats av ett projekt om betongs slaghållfasthet som CBI deltar i tillsammans med industriföretaget BINAB och TEKNIKUM vid Uppsala Universitet.

Arbetet har delvis finansierats genom ett anslag (litt 730193-0 P 342) från Statens råd för byggnadsforskning till BINAB.

Inom detta anslags ram har även rapport /7/ nedan producerats.

#### LITTERATUR

- /1/ Tetelman; Mc Evily Jr: Fracture of structural materials. John Wiley & Sons Inc. 1967.
- /2/ Broberg: Recent progress in applied mechanics. Almqvist och Wiksell, Stockholm, 1967, p 125.
- /3/ Steverding; Lehnigk: Impact and fracture. Ceramic Bulletin Vol 49, No 12, 1970, p 1057-1061.
- /4/ Sellevold; Richards: Short-time creep transition for hardened cement paste. J Amer Ceram. Soc. Vol 55, No 6, 1972, p 284-289.
- /5/ Nowick; Berry: Lognormal distribution function for describing anelastic and other relaxation processes. IBM J Res Devel 5, 1961, p 297.
- /6/ Grudemo: Privat meddelande.
- /7/ Aronsson; Fagerlund; Larsson: Betongs slagseghet i pålar. CBI rapport 1:77.
- /8/ Wittman: Discussion of some factors influencing creep of concrete. The State Institute for Technical Research, Finland, 1971. Report Series III - Building nr 167.
- /9/ Erdogan: Crack propagation theories. Part of "Fracture" (Ed. Liebowitz) Vol II, Chapter 5, p 497-590. Academic Press N.Y. and London 1971.

